-ベルトラン=チェビシェフの定理-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2019 年 7 月 16 日
最終更新 2019 年 7 月 16 日

1　ベルトラン=チェビシェフの定理

任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$n < p \leq 2n$$

を満たす素数 p が存在するといった命題をベルトランの仮説 **(Bertrand hypothesis)** という．

これについての初等的な証明を与えるために，いくつかの補題を与えていく．

補題 1　$n \in \mathbb{N}(n \geq 4)$ で

$$\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{n}.$$

Proof.

$n = 4$ のときは

$$\binom{8}{4} = 70, \quad \frac{4^4}{4} = 64$$

であるため，$n \geq 4$ を満たす n で成り立つと仮定して $n+1$ で成り立つことを示す．

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)\frac{1}{n+1}}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

を用いることで数学的帰納法の仮定より

$$2(2n+1)\binom{2n}{n} > 2(2n+1)\frac{4^n}{n} \;\Leftrightarrow\; (n+1)\binom{2(n+1)}{n+1} > 2(2n+1)\frac{4^n}{n}$$

で $\frac{2n+1}{2} > 2$ となることから

$$2(2n+1)\frac{4^n}{n} > 2 \cdot 2 \cdot 4^n = 4^{n+1}$$

となり，数学的帰納法から不等式が得られる．

よって，命題は証明された．

□

補題 2　$n \in \mathbb{N}$ で

$$\binom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}.$$

Proof.

$n=1$ のときは等号で $n=2$ のときは不等号が成り立つことがわかる．2 以上の n で成り立つと仮定して $n+1$ で成り立つとすれば，

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1}\binom{2n}{n}$$

で $\frac{2n+1}{n+1} < 2$ となることから

$$\binom{2(n+1)}{n+1} < 2 \cdot 2 \cdot \binom{2n}{n} = 2^{2n-1+2} = 2^{2(n+1)-1}.$$

よって，命題は証明された．

□

補題 3　$n \in \mathbb{N}$ 以下の素数の積 P_n とあらわしたとき

$$\frac{P_{2n-1}}{P_n} \leq \binom{2n-1}{n} \leq 2^{2n-2}.$$

Proof.

$$\binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{(n-1)(n-2)\cdots 1}$$

より，この分子には $n+1$ 以上 $2n-1$ 以下の素数が存在し，$\binom{2n-1}{n}$ は自然数であるため全ての分母は分子で約分することができる．$\frac{P_{2n-1}}{P_n}$ は $n+1$ 以上で $2n-1$ 以下の素数の積であることを示すため

$$\frac{P_{2n-1}}{P_n} \leq \binom{2n-1}{n}.$$

また，補題 2 より

$$\binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{n}{2n}\cdot\frac{2n(2n-1)!}{n!n(n-1)!} = \frac{1}{2}\binom{2n}{n} \leq 2^{-1}\cdot 2^{2n-1} = 2^{2n-2}$$

となることから不等式は成り立つ．

よって，命題は証明された．

□

補題 4　$n \in \mathbb{N}$ 以下の素数の積 P_n とあらわしたとき

$$P_n \leq 2^{2n-1}.$$

Proof.

$n=1$ のときは成り立つため，n 以下で成り立つことを仮定して，$n+1$ で成り立つことを示す．$k \in \mathbb{N}$ で $2k$ は偶数であり，素数でないため $P_{2k} = P_{2k-1}$ であり，$n+1$ は奇数として考えることができる．このとき $n+1 = 2k-1$ として，仮定より

$$P_k \leq 2^{2k-1}.$$

補題 4 より，$k+1$ から $2k-1$ までの素数の積の不等式を両辺にかけることで

$$P_{2k-1} = P_{n+1} =\leq 2^{2k-1}\cdot 2^{2k-2} = 2^{2(n+1)-1}.$$

よって，命題は証明された．

□

補題 5　$n \in \mathbb{N}$ による $n!$ を素因数分解したとき，ある素数 p が p^r の形で含まれているとき

$$r = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Proof.

n までの p の倍数は $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ だけ存在し，$n!$ を $p^{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}$ で割れば p の倍数は $n!$ から除去されるが，p^2 の倍数は存在する．同様にして，n までの p^2 の倍数は $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ だけ存在するため，同様の操作を $n < p^k$ となるまでの有限の k 回だけ繰り返す，すなわち $\lfloor \log_p n \rfloor$ 回だけ繰り返すことにより，等式が得られる．

よって，命題は証明された．

□

補題 6　$n \in \mathbb{N}$ で $\binom{2n}{n}$ を素因数分解したとき，素因数 p の指数 r は

$$r = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p (2n) \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right).$$

Proof.

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

より，補題 5 から

$$\begin{aligned} r =& ((2n)!\text{の素因数 } p \text{ の指数}) - 2 \times (n!\text{の素因数 } p \text{ の指数}) \\ =& \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p (2n) \rfloor} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \\ =& \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p (2n) \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right). \end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

補題 7　$n \in \mathbb{N}(n \geq 5)$ で $n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在しないと仮定したとき

$$\left(\frac{2}{3}n - \frac{\sqrt{2n}}{3} \right) \ln 2 < \left(\frac{\sqrt{2n}}{3} + 3 \right) \ln n.$$

Proof.

まずは，$\binom{2n}{n}$ の素因数 p について $p \leq \frac{2}{3}n$ が成り立つことを示す．$p > \frac{2}{3}n$ と仮定する．補題 6 より $\binom{2n}{n}$ を素因数分解したとき，素因数 p の指数 r について

$$r = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_p (2n) \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

であるが，括弧内は $\frac{n}{p^k}$ の小数部が 0.5 以上で 1，0.5 未満で 0 となるため

$$r \leq \left\lfloor \log_p (2n) \right\rfloor \leq \log_p (2n) \ \Rightarrow \ p^r \leq 2n.$$

仮定より，$n < p \leq 2n$ を満たす素数 p は存在しないため $\frac{3}{2}n < p \leq n$ となる．$n \geq 5$ であるため $2n < \left(\frac{2}{3}n\right)^2$ より $2n < p^2$ であり，$\log_p p^2 = 2$ から $\log_p (2n) \leq 1$ となる．これより，$\frac{3}{2}n < p \leq n$ から $1 \leq \frac{n}{p} < \frac{3}{2}$ となることを用いることにより，

$$\begin{aligned} r \leq & \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \\ =& 2 - 2 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

となるが，$r \geq 1$ の仮定に矛盾する．つまり，$p \leq \frac{2}{3}n$ である．

$p^r \leq 2n$ より $\sqrt{2n} < p$ なら $r \leq \log_p (2n) < 2$ となるため，$k \in \mathbb{N}$ 以下の素数の積を P_k とあらわしたとき，

$$\binom{2n}{n} = (\text{素因数が } \sqrt{2n} \text{ 以下の部分}) \cdot \frac{P_{\frac{2}{3}n}}{P_{\sqrt{2n}}}.$$

ここで，$k \in \mathbb{N}$ で $\sqrt{k}$ 以下の素数の個数は 2 と 3 の倍数を除いた $\frac{\sqrt{k}}{3}$ に 2 と 3 の 2 つを加えた $\frac{\sqrt{k}}{3} + 2$ よりは小さいため，このことと補題 4 および仮定より $\sqrt{2n} > 3$ となることを用いれば

$$\binom{2n}{n} < (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{3}+2} \cdot \frac{2^{\frac{2\cdot 2}{3}n-1}}{3 \cdot 2} < (2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{3}+2} 2^{\frac{4}{3}n-3}.$$

この式と補題 1 で $\binom{2n}{n}$ を含まない不等式を構築し，その両辺に対して対数をとれば

$$\begin{aligned} 2n \ln 2 - \ln n &< \left(\frac{\sqrt{2n}}{3} + 2\right)(\ln 2 + \ln n) + \left(\frac{4}{3}n - 3\right) \ln 2 \\ \left(\frac{2}{3}n - \frac{\sqrt{2n}}{3} + 1\right) \ln 2 &< \left(\frac{\sqrt{2n}}{3} + 3\right) \ln n \\ \left(\frac{2}{3}n - \frac{\sqrt{2n}}{3}\right) \ln 2 &< \left(\frac{\sqrt{2n}}{3} + 3\right) \ln n. \end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

補題 7 の式は大きな n 以上では成り立たないことがわかる．つまり，大きな n では $n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在する．そのため，補題 7 の成り立たなくなる適当な n を求め，それ以上では補題 7 が成り立たないことを示せばいい．

これにより，以下のように定理が与えられる．

定理 1　ベルトラン=チェビシェフの定理

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$n < p \leq 2n$$

を満たす素数 p が存在する．これをベルトラン=チェビシェフの定理 **(Bertrand-Chebyshev theorem)** という．

Proof.

補題 7 で $n = 70$ とすれば不等式が成り立たないことがわかる．n を $x \in \mathbb{R}$ に置き換え，両辺に $\frac{3}{x}$ をかけると

$$\left(2 - \sqrt{\frac{2}{x}}\right) \ln 2 < \left(\sqrt{2x} + 9\right) \frac{\ln x}{x} = \sqrt{2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 9 \frac{\ln x}{x}$$

となり，$t \in \mathbb{R}$ で $\frac{\ln t}{t}$ とあらわされる関数は $e < t$ で単調減少するため，この不等式の両辺は $e^2 < x$ で単調減少関数である．また，$x \to \infty$ とすることで左辺は $2\ln 2$ へと，右辺は 0 へと収束するため，$x = 70$ 以上では不等式は成り立たない．つまり，$n = 70$ 以上では $n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在する．

$n = 70$ 未満では p と n に直接値を代入していくことで，$n = 70$ 未満でも $n < p \leq 2n$ が成り立つことが確認できる．

よって，命題は証明された．

$\square$