線型幾何 -ベクトル-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

初回更新 2018 年 12 月 17 日
最終更新 2019 年 7 月 20 日

目次

第 1 章

ベクトル

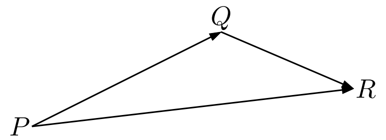
1.1　ベクトルの定義

幾何では角度や線分の長さといったものをユークリッド空間 E^n 上で考えたが，それらの角度や長さといった量を 1 つにまとめた概念を考えることができる．

そこで，以下の定義を与える．

定義 1.1

ユークリッド空間 E^n の点 P, Q, R で



のように P から R へといった大きさと指向性をもった量を**ベクトル**といい，P から R へのベクトルを $\overrightarrow{PR}$，大きさを $|\overrightarrow{PR}|$ とあらわし，このときの P を**始点**，R を**終点**という．また，ベクトルに対して大きさのみの量を**スカラー**といい，それは $\mathbb{R}$ の元である．

R から P へのベクトルを

$$\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$$

とあらわすとし，$n \in \mathbb{R}$ によって

$$n\overrightarrow{PR}$$

とあらわされたベクトルは $\overrightarrow{PR}$ の方向はそのままで大きさが n 倍されたものであると定義し，$n = 1$ のときはそれを省略する．さらに，図中のベクトルの関係について

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

が成り立つ．特に，大きさが 0 であるベクトルを**零ベクトル**といい

$$\overrightarrow{PR} + (-\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{0}$$

を常に満たす．

ベクトルを 1 文字で $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{PR}$ としたとき，アロー表示ではなく $\boldsymbol{a}$ のようにボールド表示をすることが多く，零ベクトルであれば $\boldsymbol{0}$ のようにあらわす．また，この図のように線分に矢印を付けた表現を**有向線分**という．

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が存在し，そのベクトルの向きと大きさが等しいとき，2 つのベクトルは**等しい**といい，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ とあらわす．特に，大きさが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**といい，あるベクトルの大きさを方向は同一で大きさを 1 にする操作を**正規化**という．

このような有向線分によるベクトルの定義によって以下の性質が与えられる．

定理 1.1

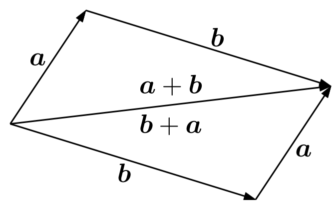
ユークリッド空間 E^n におけるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ について

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \\ (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \end{cases}$$

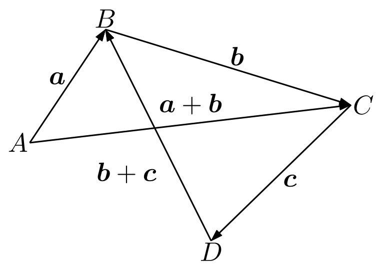
が成り立つ．それぞれをベクトルにおける**交換法則**および**結合法則**という．

Proof.

以下の図より，ベクトルの加算順序を交換しても始点と終点が一致するため，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ は等しく，交換法則が成り立つことがわかる．



同様にして



のような図を考えれば

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} &= (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{AD} \\
\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) \\
&= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

となり，交換法則が成り立つことがわかる．

よって，命題は証明された．

□

定理 1.2

ユークリッド空間 E^n におけるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ および $m, n \in \mathbb{R}$ が与えられたとき

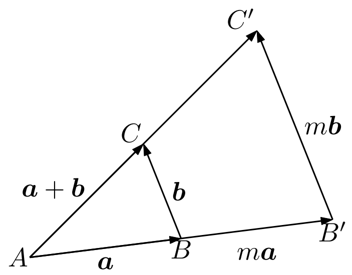
$$\begin{cases} (m+n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{a} \\ m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b} \end{cases}$$

が成り立つ．このようにベクトルとスカラーの積について分配法則が成り立つことを**線型性**という．

Proof.

第 1 式はベクトルの定義より自明である．

第 2 式は



のような図を考えることで $\triangle ABC$ と $\triangle AB'C'$ は相似であるため

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} : \overrightarrow{AC'} =& 1 : m \\ \overrightarrow{AC'} =& m\overrightarrow{AC} \\ =& m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC'} =& \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} \\ =& m\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

となることから成り立つことがわかる．

よって，命題は証明された．

□

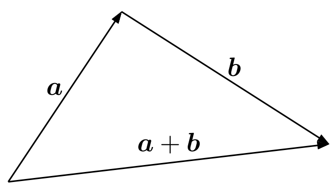
定理 1.3　三角不等式

ユークリッド空間 E^n におけるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の大きさについて

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$$

が成り立ち，等号成立条件は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の向きが等しいことである．これを**三角不等式**という．

Proof.



図のように考えることで $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ となることは明らかであり，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の向きが等しければ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ はちょうど重なるため等号が成り立つ．

よって，命題は証明された．

□

また，三角不等式については帰納的に考えることで n 個のベクトルについても成り立つことがわかる．

1.2　座標系とベクトル

ユークリッド空間 E^n におけるベクトルは有向線分として扱っていたが，一意に E^n におけるベクトルをあらわすことができるようにするべきである．ベクトルは始点と終点によって決まることから，それらを定めるような基準を与え

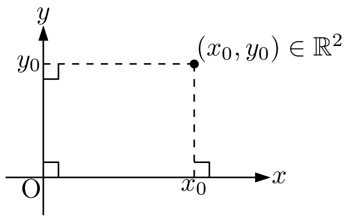
るべきである．

そこで，以下の定義を与える．

定義 1.2

幾何学において，ユークリッド空間 E^n と $\mathbb{R}^n$ を同一視したとき，E^n の任意の元のことを**座標**といい，その座標を与える方式を**座標系**という．

特に，n 本の互いに直交するような直線に対する射影によって E^n の座標を与える方法を**直交座標系**もしくは**デカルト座標系**といい，これらの直線を**座標軸**という．また，以下の図は $\mathbb{R}^2$ における直交座標系の対応であり，矢印の方向が正の向きに対応する．



特に，基底ベクトルが全て単位ベクトルな直交座標系を**正規直交系**という．

座標系の概念を用いることにより，ベクトルは 2 つの座標を始点と終点として与えることができる．つまり，ユークリッド空間 E^n で同じ座標系における座標 $(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in E^n$ を始点として $(q_1, q_2, \cdots, q_n) \in E^n$ を終点とするベクトル $\boldsymbol{a} \in E^n$ は

$$\boldsymbol{a} = (q_1, q_2, \cdots, q_n) - (p_1, p_2, \cdots, p_n) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2 \cdots, q_n - p_n) \in E^n$$

とあらわされる．つまり，任意のベクトルは E^n の元であると考えることができ，$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ のように座標に対して座標を決定づけるベクトルを定義することで

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$$

とあらわされる．なお，$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$ である．このような座標を示すベクトルを**位置ベクトル**という．

また，$\boldsymbol{a} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2 \cdots, q_n - p_n)$ は始点を原点であるとすることで位置ベクトルとすることができ，このときの座標の各座標軸に対応する $q_k - p_k$ をベクトルの**成分**という．

ここで，ユークリッド空間ではなく，$\mathbb{R}^n$ についても同様のことを考えることができるため，$\mathbb{R}^n$ におけるベクトルの成分の表現方法について考える．n が有限であれば $\mathbb{R}^n$ の任意の元は順序対としてあらわされ，それはベクトルと考えることができるため，n が有限であることを仮定して考える．

ベクトルの和の性質により，任意のベクトルは複数のベクトルの和に分解できるのと，ベクトルのスカラー倍が定義されることから，そのスカラー倍にベクトルの成分を対応させ，それぞれの成分をベクトルの和に分解して考える．このとき，適当なベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ を与え，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ とすることで

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

とあらわすことができる．これがベクトルの成分の一般的な表現方法であり，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の集合をベクトルおよびユークリッド空間における**基底**といい，それぞれのベクトルを**基底ベクトル**という．この基底により，$\mathbb{R}^n$ の任意の元はあらわされる．

次に，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底なるかについて考える．基底にならないとはすなわち，1 つの基底ベクトルを選択したときに他の基底ベクトルのスカラー倍と加算によってあらわされることである．

ここで，このことの一般のベクトルに対する定義を与える．

定義 1.3

m 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$ が与えられたする．なお，$m \leq n$ であるとする．このとき，与えられたベクトルから $\boldsymbol{x}_k$ を選択したとき，他のベクトルのスカラー倍と加算によってあらわすことができなく，それが全

ての与えられたベクトルについて成り立つとき，それらのベクトルは**線型独立**もしくは**一次独立**であるという．同様に，線型独立でないときは**線型従属**もしくは**一次従属**であるという．また，$a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ を与えたとき，

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m$$

とあらわすことを**線型結合**もしくは**一次結合**という．

線型独立であることとは $\boldsymbol{x}_k$ が他のベクトルによって生成されないことである，つまりは与えられたベクトルの線型結合において生成される零ベクトルは

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$$

を満たし，これは線型独立の定義と同値である．つまり，線型独立なベクトルは非自明な零ベクトルを生成しない．

線型結合の定義では $\mathbb{R}^n$ で n を超えるベクトルの場合を考えていないが，その場合における補題を与える．

補題 1.1$\mathbb{R}^n$ から n を超えるベクトルベクトルを選択したとき，それらは必ず線型従属である．

Proof.

n よりも大きい m によってベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m \in \mathbb{R}^n$ を選択したとする．また，$\boldsymbol{x}_k$ は成分によって

$$\boldsymbol{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})$$

とあらわされるとする．このとき，線型独立の定義に基づいてスカラー係数 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ を与えれば

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$$

によりそれぞれの成分ごとで $a_1, a_2, \cdots, a_n$ についての連立方程式を立てることで

$$\begin{cases} a_1x_{1,1} + a_2x_{2,1} + \cdots + a_mx_{m,1} = 0 \\ a_1x_{1,2} + a_2x_{2,2} + \cdots + a_mx_{m,2} = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_1x_{1,n} + a_2x_{2,n} + \cdots + a_mx_{m,n} = 0 \end{cases}$$

となり，n 個の方程式に対して n よりも大きい m だけ変数が存在するため，解は 1 つには定まらない，すなわち 0 以外の解が存在する．

よって，命題は証明された．

□

これより，以下の定理が得られる．

定理 1.4

$\mathbb{R}^n$ の基底の数は基底の取り方に依らず n である．

また，基底の数をそのベクトルの**次元**といい，$\dim \mathbb{R}^n = n$ とあらわされる．この基底の数による次元の考え方は有限の次元であるときに考えることができる．

Proof.

$\mathbb{R}^n$ の基底を $A = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ および $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m\}$ とする．このとき，それぞれは基底であるため A から B を，B から A を生成することができる．

$n > m$ であるとき，B から A を生成することを考えれば，m 個の線型独立なベクトルから n 個の線型独立なベクトルを生成するということであるが，$n > m$ よりこのとき生成される n 個のベクトルは線型従属となるため矛盾である．

$n < m$ であるときも同様にして，補題より $\mathbb{R}^n$ から n を超えるベクトルを選択すればそれらは必ず線型従属であるため矛盾である．

以上より，$n = m$ でなければならず，基底の数は基底の取り方に依らず n である．

よって，命題は証明された．

□

また，線型結合によるスカラー係数について以下の定理が成り立つ．

定理 1.5

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が線型独立なベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m \in \mathbb{R}^n$ とスカラー係数 $a_1, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{R}$ によって

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{e}_m$$

とあらわされるとする．なお，$m \leq n$ であるとする．このとき，スカラー係数は一意に与えられる．

Proof.

他に $b_1, b_2, \cdots, b_m \in \mathbb{R}$ と成分をとることができると仮定すれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{0} =& \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} =& (a_1 - b_1)\boldsymbol{e}_1 + (a_2 - b_2)\boldsymbol{e}_2 + \cdots + (a_m - b_m)\boldsymbol{e}_m\end{aligned}$$

となり，線型独立の定義より

$$a_1 - b_1 = a_2 - b_2 = \cdots = a_m - b_m = 0$$

となり，$a_k \neq b_k$ の仮定に矛盾する．

よって，命題は証明された．

□

これより，直ちに以下の系が得られる．

系 1.5-1　n が有限であるとき，$\mathbb{R}^n$ は基底を用いることで $\mathbb{R}^n$ の任意の元をあらわすことができる．

Proof.

線型結合の一意性より自明である．

□

また，$\mathbb{R}^n$ だけではベクトルの演算を満たす実数による順序対というだけであるため，座標や座標系の概念を含んでいない．また，ユークリッド空間とはベクトルに対して座標および座標系の概念を含んでいる．

そこで，ベクトルの概念を導入することでユークリッド空間に対して厳密な定義を与える．

定義 1.4

写像 $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を与えたとき

1). $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$ を満たす

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ \varphi(a, b) + \varphi(b, c) = \varphi(a, c)$$

2). 任意の点 a を始点とするベクトル $\boldsymbol{x}$ が与えられたとき終点 b がただ 1 に定まる

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ \exists b \in \mathbb{R}^n, \varphi(a, b) = \boldsymbol{x}$$

を満たすとき，組 $(\varphi, \mathbb{R}^n)$ を**ユークリッド空間**といい，E^n とあらわすが，特に混同することがなければ $\mathbb{R}^n$ とあらわすことが多い．

また，n はユークリッド空間の次元であり，φ は座標系を与える．

また，座標系の概念を与えることでベクトルの大きさを式で与えることができ，特に直交座標系におけるベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$ では三平方の定理により

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

となる．特に 1 次元のベクトルを考えれば，$|\boldsymbol{x}| = |x_1|$ であるため，$\boldsymbol{a}_1 = (a_1), \boldsymbol{a}_2 = (a_2), \cdots, \boldsymbol{a}_n = (a_n) \in E$ を与えれば，三角不等式は

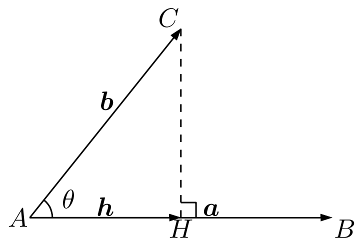
$$|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n| \leq |\boldsymbol{a}_1| + |\boldsymbol{a}_2| + \cdots + |\boldsymbol{a}_n| \;\Rightarrow\; |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

とあらわされる．

1.3　ベクトルの積

ここでは幾何で一般的に考える対象である 3 次元ユークリッド空間 E^3 において考える．

まずは，2 つのベクトルによる計量について考える．図のように直交座標系において



のようにベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in E^3$ とその成す角 θ および C から AB に垂線を下した点 H によるベクトル $\boldsymbol{h} \in E^3$ を与えれば，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の同じ方向分の長さの積は

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{h}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

と与えられる．また，$\boldsymbol{h}$ を $\boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{a}$ 上への**正射影**という．

ここで，以下の定義を与える．

定義 1.5

直交座標系であるユークリッド空間 E^3 におけるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とその成す角 θ により

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

と与えられる 2 項演算 $\cdot : E^3 \times E^3 \to \mathbb{R}$ をベクトルの**内積**もしくは**計量**という．

また，内積は以下の性質を満たす．

定理 1.6

直交座標系であるユークリッド空間 E^3 におけるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ による内積について

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$$

を満たす．これを，内積における**交換法則**という．

Proof.

実数の積が可換であることから自明である．

□

ここで，内積をベクトルの成分を用いてあらわすことを考える．このとき，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ および $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とあらわすことで余弦定理より

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|^2 =& |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \\
(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 =& |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\
|\boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) =& |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\
\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =& a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned}$$

となり，内積の成分による関係づけがされる．

ここで，このことを以下にまとめる．

定理 1.7

直交座標系であるユークリッド空間 E^3 におけるベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ の内積について，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角 θ により

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

という関係式が成り立つ．

Proof.

導出より明らか．

□

これにより，内積の線型性が容易に示される．

定理 1.8

直交座標系であるユークリッド空間 E^3 におけるベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ および $n\in\mathbb{R}$ による内積について

$$\begin{cases}(n\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(n\boldsymbol{b})=n(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\\ \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\end{cases}$$

が成り立つ．これを内積の**線型性**という．

Proof.

第 1 式は $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ および $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ とすることで

$$\begin{aligned}(n\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=&na_1b_1+na_2b_2+na_3b_3\\ \boldsymbol{a}\cdot(n\boldsymbol{b})=&a_1nb_1+a_2nb_2+a_3nb_3\\ n(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=&na_1b_1+na_2b_2+na_3b_3\end{aligned}$$

となり，実数の積は可換であることから第 1 式は成り立つ．

第 2 式は $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ とすることで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=&a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+b_2)+a_3(b_3+c_3)\\ =&(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\ =&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

となり，第 2 式は成り立つ．

よって，命題は証明された．

□

次に，内積の多次元への拡張を考える．E^n が基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ による正規直交系であることを仮定して，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ および $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ といった成分による内積を考える．

これを簡易的にあらわすために以下の定義を与える．

定義 1.6

集合 I とその元 i,j について

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (other)\end{cases}$$

によって定義される特殊関数 $\delta_{ij}:I\times I\to\{1,0\}$ を**クロネッカーのデルタ**という．

このとき，基底ベクトルはそれぞれ直交するため，基底ベクトルの内積についてクロネッカーのデルタを用いることにより

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$$

となるため，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =& (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n) \cdot (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n) \\ =& a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\end{aligned}$$

となる．

これにより，多次元におけるベクトルの内積を定義することができる．

定義 1.7

直交座標系であるユークリッド空間 E^n におけるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

と定義される 2 項演算 $\cdot : E^n \times E^n \to \mathbb{R}$ を**内積**という．

また，内積により，多次元における $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角 θ は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

であると定義される．同様にして，2 つのベクトルが直交するとは $\theta = \frac{\pi}{2}$ である，すなわち

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

と定義される．

内積の定義により，2 つのベクトルが直交する必要十分条件が定義されたため，2 つのベクトルが平行である条件を考える．

これはベクトルの定義より以下のように与えられる．

定義 1.8

ユークリッド空間 E^n における零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行であるとは

$$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \iff \exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ s.t.\ \boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$$

を満たすことである．

次に，正規直交系である E^3 における 2 本のベクトルにより，その 2 本のベクトルと直交するベクトルを生成することを考える．E^3 の基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ としたとき，それぞれは直交するため，適当な 2 項演算子 $\times$ により

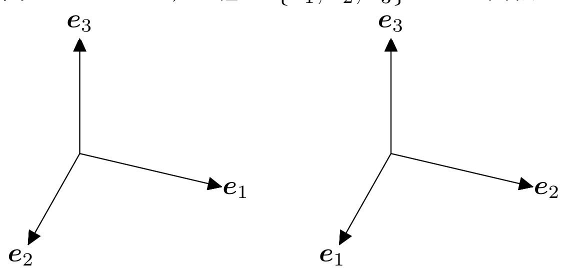
$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\ or\ -\boldsymbol{e}_3$$

となるため，正規直交系の取り方にもよって結果が変わることがわかる．

そのため，E^3 における直交座標系の定義を与える．

定義 1.9

直交座標系であるユークリッド空間 E^3 において，基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ として回転による重複を無視すれば



のように 2 つの場合が存在する．左図のような座標系を**左手系座標系**といい，右図のような座標系を**右手系座標系**という．

一般に，物理学における背景から右手系が標準である．

右手系に基づけば

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$$

となり，一意に計算結果を対応することができる．同様にして

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 =& \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 =& \boldsymbol{e}_2\end{aligned}$$

と与えられる．また，他の組み合わせに対しては

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j =& -(\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_i) \\ \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_i =& \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

が成り立つとする．ここで，幾何学的に証明可能であるが，複雑化回避のために分配法則

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_i \times (\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k) =& \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k \\ =& \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_k\end{aligned}$$

が成り立つことを仮定する．

このとき，$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3) \in E^3$ に対してこの積の 2 項演算を適用すれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} =& (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times (b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3) \\ =& a_1b_2(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) + a_1b_3(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3) + a_2b_1(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1) + a_2b_3(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) + a_3b_1(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1) + a_3b_2(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2) \\ =& (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

となる．ここで，この結果が well-defined であるかどうか確かめる．このとき，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交するため，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{a}$ および $\boldsymbol{b}$ の内積を作用させて，それが 0 になればいい．

$\boldsymbol{a}$ の内積を作用させると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) =& a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ =& a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 \\ =& 0\end{aligned}$$

となり，同様に $\boldsymbol{b}$ の内積を作用させると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) =& b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ =& a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 \\ =& 0\end{aligned}$$

となり，well-defined であることが確かめられる．

また，このときのベクトルの大きさを考えれば，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角 θ を用いることにより

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 =& (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ =& (a_2b_3)^2 + (a_3b_2)^2 + (a_3b_1)^2 + (a_1b_3)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 - 2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2) \\ =& a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) + (a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + (a_3b_3)^2 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ =& a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ =& (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ =& |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \\ =& |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta \\ =& |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\ =& |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

となるため

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$$

が得られる．

ここで，以下の定義を与える．

定義 1.10

直交座標系であるユークリッド空間 E^3 におけるベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ により

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

と定義される 2 項演算 $\times : E^3 \times E^3 \to E^3$ を**外積**という．

また，外積の大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の成す角 θ を用いることにより

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta$$

と与えられる．

また，外積の導出により以下の性質が得られる．

定理 1.9

直交座標系であるユークリッド空間 E^3 におけるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ による外積について

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

が成り立つ．このような交換により符号が反転する性質を**交代性**もしくは**反対称性**，**歪対称性**という．

Proof.

導出より明らか．

□

定理 1.10

直交座標系であるユークリッド空間 E^3 におけるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ および $n \in \mathbb{R}$ による外積について

$$\begin{cases} (n\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (n\boldsymbol{b}) = n(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \end{cases}$$

が成り立つ．これを外積の**線型性**という．

Proof.

第 1 式は $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とすることにより

$$\begin{aligned} (n\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} =& (na_2b_3 - na_3b_2, na_3b_1 - na_1b_3, na_1b_2 - na_2b_1) \\ =& n(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ \boldsymbol{a} \times (n\boldsymbol{b}) =& (a_2nb_3 - a_3b_2, a_3nb_1 - a_1nb_3, a_1nb_2 - a_2nb_1) \\ =& n(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ n(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) =& n(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned}$$

となり，第 1 式は成り立つ．

第 2 式は導出より自明である．

よって，命題は証明された．

□

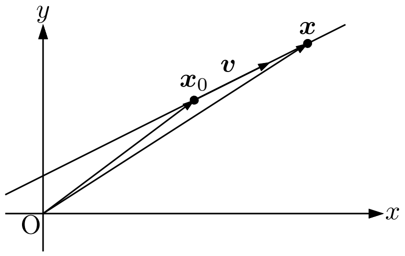
実際，ベクトルというのは四元数を元に生まれたものであり，純虚四元数 $a=(0;a_1,a_2,a_3), b=(0;b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{H}$ による積は

$$ab=-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_2b_3-a_3b_2)i+(a_3b_1-a_1b_3)j+(a_1b_2-a_2b_1)k$$

となり，実部と虚部に対して自然に内積と外積が導出される．

1.4　ベクトルと幾何

ここでは，ベクトルを用いたより具体的な図形について示すことを考える．直交座標系であるユークリッド空間 E^2 において，固定された位置ベクトル $\boldsymbol{x}_0\in E^3$ を通る直線を考えれば，図のように



直線の方向を定めるベクトル $\boldsymbol{v}\in E^2$ により

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}t$$

と与えられる．また，$\boldsymbol{v}$ を**方向ベクトル**という．これは容易に多次元へと拡張され，多次元における直線を定義することができる．

そこで，以下の定義を与える．

定義 1.11

直交座標系であるユークリッド空間 E^n において，固定された位置ベクトル $\boldsymbol{x}_0\in E^n$ と方向ベクトル $\boldsymbol{v}\in E^n$ および独立変数 t と従属変数 $\boldsymbol{x}\in E^n$ により

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{v}t$$

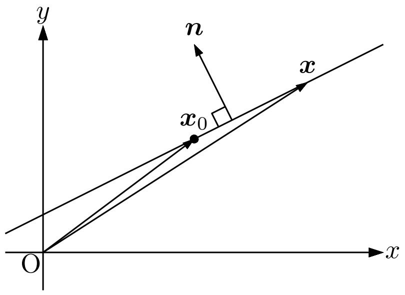
を多次元における**直線の方程式**という．

特に，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{x}_0=(x_{1,0},x_{2,0},\cdots,x_{n,0})$，$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ とすることで t は除去することが可能であり

$$\frac{x_1-x_{0,1}}{v_1}=\frac{x_2-x_{0,2}}{v_2}=\cdots=\frac{x_n-x_{0,n}}{v_n}(=t)$$

とあらわされる．

また，図のように



直線に直交するベクトル $\boldsymbol{n}\in E^2$ をとれば，$\boldsymbol{x}_0$ を通る直線が常に $\boldsymbol{n}$ と直交するため，直線の方程式は

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0$$

のようにあらわすことができる．また，$\boldsymbol{n}$ のことを**法線ベクトル**という．

この直線の定義について E^3 で考えれば，$\boldsymbol{n}$ に直交する平面の方程式になることがわかる．同様にして考えれば，E^n

では $n-1$ 次元の平坦な部分集合を構築し，E^n をちょうど 2 分割する．

これについての定義を与える．

定義 1.12

直交座標系であるユークリッド空間 E^n において，固定された位置ベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in E^n$ と法線ベクトル $\boldsymbol{n} \in E^n$ および変数 $\boldsymbol{x} \in E^n$ により

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$$

で与えられる方程式を**超平面の方程式**という．

また，円や球面の定義について考えれば，ある点 $\boldsymbol{x}_0$ から距離が等しい点の集合である．つまり，E^2 において半径 r の円は

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| = r$$

と与えられる．同様にして E^3 でも $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} \in E^3$ とすることで

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| = r$$

と全く同じ式で与えられる．これより，多次元における球面を考えることができる．

これより，以下の定義を与える．

定義 1.13

直交座標系であるユークリッド空間 E^n において，固定された位置ベクトル $\boldsymbol{x}_0 \in E^n$ と正の定数 $r \in \mathbb{R}$ および変数 $\boldsymbol{x} \in E^n$ により

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| = r$$

で与えられる方程式を**超球面の方程式**という．

1.5　線型写像

ここでは，線型性についてより一般的なことについて考える．

そのためにまずは以下の定義を与える．

定義 1.14

写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ において，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ および $m, n \in \mathbb{R}$ により

$$f(m\boldsymbol{a} + n\boldsymbol{b}) = mf(\boldsymbol{a}) + nf(\boldsymbol{b})$$

を満たすとき，f を $\mathbb{R}$ 上の**線型写像**もしくは**一次写像**といい，特に $n = m$ であるときユークリッド空間上で考えれば座標変換に対応することから，これを**線型変換**もしくは**一次変換**という．

また，この写像の性質を**線型性**という．

ベクトルの加法や内積，外積を写像と考えれば，それは線型写像の特殊化であると考えることができ，線型写像を考えることで線型性のより一般的なことを考えることができる．

ここで，線型写像の最も基本となる定理を与える．

定理 1.11

任意の線型写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ および $\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$ で $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$ として，定

数 $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \cdots, \alpha_{m,1}, \alpha_{1,2}, \cdots, \alpha_{m,n}$ を与えることで

$$\begin{cases} x'_1 = & \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n \\ x'_2 = & \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n \\ \quad \vdots & \\ x'_m = & \alpha_{m,1}x_1 + \alpha_{m,2}x_2 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n \end{cases}$$

と一意にあらわされる．

Proof.

$\boldsymbol{x}$ が基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ により

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

とあらわされるとする．このとき，$\boldsymbol{x}$ に対して f が作用すれば，線型写像の定義より

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n)$$

となる．ベクトルの基底は不変であるため $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n) \in \mathbb{R}^m$ は mn 個の定数

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{e}_1) = & (\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \cdots, \alpha_{m,1}) \\ f(\boldsymbol{e}_2) = & (\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \cdots, \alpha_{m,2}) \\ \qquad \vdots & \\ f(\boldsymbol{e}_n) = & (\alpha_{1,n}, \alpha_{2,n}, \cdots, \alpha_{m,n}) \end{cases}$$

として考えることができる．また，$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ も m 値をもつため，これを全て並べることにより

$$\begin{cases} x'_1 = & \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n \\ x'_2 = & \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n \\ \quad \vdots & \\ x'_m = & \alpha_{m,1}x_1 + \alpha_{m,2}x_2 + \cdots + \alpha_{m,n}x_n \end{cases}$$

が得られ，一意性をも明らかである．

よって，命題は証明された．

□