# 線型幾何 -線型写像と行列-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2019 年 7 月 21 日
最終更新 2019 年 8 月 19 日

# 目次

# 第 1 章

# 行列

## 1.1 行列の構成

線型写像 $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ の合成写像 $g\circ f$ を考える．$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$ と $a,b\in\mathbb{R}$ を用いることで

$$(g\circ f)(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) = g(af(\boldsymbol{x})+bf(\boldsymbol{y})) = ag(f(\boldsymbol{x}))+bg(f(\boldsymbol{x})) = a(g\circ f)(\boldsymbol{x})+b(g\circ f)(\boldsymbol{x})$$

となることから，$g\circ f$ も線型写像である．また，$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ および $\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$ で $\boldsymbol{x}' = (x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)\in\mathbb{R}^n$ として，定数 $\alpha_{1,1},\alpha_{2,1},\cdots,\alpha_{n,1},\alpha_{1,2},\cdots,\alpha_{n,m}$ を与えることで

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha_{1,1}x_1+\alpha_{1,2}x_2+\cdots+\alpha_{1,m}x_m \\ x'_2 = \alpha_{2,1}x_1+\alpha_{2,2}x_2+\cdots+\alpha_{2,m}x_m \\ \qquad\vdots \\ x'_n = \alpha_{n,1}x_1+\alpha_{n,2}x_2+\cdots+\alpha_{n,m}x_m \end{cases}$$

と一意にあらわされる．この線型写像の様子を便宜的に

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

と表現するとする．同様にして，$\boldsymbol{x}'' = g(\boldsymbol{x}')$ で $\boldsymbol{x}'' = (x'_1,x'_2,\cdots,x'_l)\in\mathbb{R}^l$ として，定数 $\beta_{1,1},\beta_{2,1},\cdots,\beta_{l,1},\beta_{1,2},\cdots,\beta_{l,n}$ を与えることで

$$\begin{cases} x''_1 = \beta_{1,1}x'_1+\beta_{1,2}x'_2+\cdots+\beta_{1,n}x'_n \\ x''_2 = \beta_{2,1}x'_1+\beta_{2,2}x'_2+\cdots+\beta_{2,n}x'_n \\ \qquad\vdots \\ x''_l = \beta_{l,1}x'_1+\beta_{l,2}x'_2+\cdots+\beta_{l,n}x'_n \end{cases}$$

とあらわし，

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ \vdots \\ x''_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{l,1} & \beta_{l,2} & \cdots & \beta_{l,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

と表現するとする．

このとき，合成写像 $\boldsymbol{x}'' = (g\circ f)(\boldsymbol{x})$ は

$$x''_i = \sum_{s=1}^{n}\beta_{i,s}x'_s = \sum_{s=1}^{n}\beta_{i,s}\alpha_{s,1}x_1 + \sum_{s=1}^{n}\beta_{i,s}\alpha_{s,2}x_2 + \cdots + \sum_{s=1}^{n}\beta_{i,s}\alpha_{s,m}x_m$$

となるため，

$$
\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ \vdots \\ x_l'' \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{l,1} & \beta_{l,2} & \cdots & \beta_{l,n} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \beta_{1,i}\alpha_{i,1} & \sum_{i=1}^n \beta_{1,i}\alpha_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \beta_{1,i}\alpha_{i,m} \\ \sum_{i=1}^n \beta_{2,i}\alpha_{i,1} & \sum_{i=1}^n \beta_{2,i}\alpha_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \beta_{2,i}\alpha_{i,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n \beta_{l,i}\alpha_{i,1} & \sum_{i=1}^n \beta_{l,i}\alpha_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^n \beta_{l,i}\alpha_{i,m} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}
$$

と表現することができる．また，これは $m = 1$ としたとき

$$
\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{l,1} & \beta_{l,2} & \cdots & \beta_{l,n} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \beta_{1,1}\alpha_{1,1} + \beta_{1,2}\alpha_{2,1} + \cdots + \beta_{1,n}\alpha_{n,1} \\ \beta_{2,1}\alpha_{1,1} + \beta_{2,2}\alpha_{2,1} + \cdots + \beta_{2,n}\alpha_{n,1} \\ \vdots \\ \beta_{l,1}\alpha_{1,1} + \beta_{l,2}\alpha_{2,1} + \cdots + \beta_{l,n}\alpha_{n,1} \end{pmatrix}
$$

となり，線型写像としての振る舞いをし，このとき，$(\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \cdots, \alpha_{n,1})$ はベクトルとして扱うことができる．$n = 1$ としたときは

$$
\begin{pmatrix} x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,m} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{1,m}x_m \end{pmatrix}
$$

となり，ベクトルの内積としての振る舞いをする．つまり，線型写像が合成可能であるとき，その合成写像はベクトルの内積を一般化したものとなる．

次に，$f$ と $g$ が同次元の線型変換，すなわち $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ としたとき，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ に対する線型変換の和 $af(\boldsymbol{x}) + bg(\boldsymbol{x})$ は

$$
a \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{1,n}x_n \\ \alpha_{2,1}x_1 + \alpha_{2,2}x_2 + \cdots + \alpha_{2,n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \cdots + \alpha_{n,n}x_n \end{pmatrix}
+ b \begin{pmatrix} \beta_{1,1}x_1 + \beta_{1,2}x_2 + \cdots + \beta_{1,n}x_n \\ \beta_{2,1}x_1 + \beta_{2,2}x_2 + \cdots + \beta_{2,n}x_n \\ \vdots \\ \beta_{n,1}x_1 + \beta_{n,2}x_2 + \cdots + \beta_{n,n}x_n \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} (a\alpha_{1,1} + b\beta_{1,1})x_1 + (a\alpha_{1,2} + b\beta_{1,2})x_2 + \cdots + (a\alpha_{1,n} + b\beta_{1,n})x_n \\ (a\alpha_{2,1} + b\beta_{2,1})x_1 + (a\alpha_{2,2} + b\beta_{2,2})x_2 + \cdots + (a\alpha_{2,n} + b\beta_{2,n})x_n \\ \vdots \\ (a\alpha_{n,1} + b\beta_{n,1})x_1 + (a\alpha_{n,2} + b\beta_{n,2})x_2 + \cdots + (a\alpha_{n,n} + b\beta_{n,n})x_n \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a\alpha_{1,1} + b\beta_{1,1} & a\alpha_{1,2} + b\beta_{1,2} & \cdots & a\alpha_{1,n} + b\beta_{1,n} \\ a\alpha_{2,1} + b\beta_{2,1} & a\alpha_{2,2} + b\beta_{2,2} & \cdots & a\alpha_{2,n} + b\beta_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a\alpha_{n,1} + b\beta_{n,1} & a\alpha_{n,2} + b\beta_{n,2} & \cdots & a\alpha_{n,n} + b\beta_{n,n} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

となるため，線型変換の加算を上のように定めれば線型性を満たし，交換法則や結合法則もただちに成り立つことがわかる．

以上より，線型写像はベクトルの 1 つの形態であり，線型変換において加算が定義されるということは同じ次元ならばベクトルは加算可能であるということである．つまり，線型写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^{n \times n}$ における $m \times n$ 次元ベクトルである．

ここで，以下の定義を与える．

**定義 1.1**

線型写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ は $a_{1,1}, a_{2,1}, \cdots, a_{n,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{n,m}$ により

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

とあらわした $m \times n$ 次元ベクトルを**行列 (matrix)** もしくは $n$ 行 $m$ 列行列，$n \times m$ 行列という．このとき，$a_{1,1}, a_{2,1}, \cdots, a_{n,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{n,m}$ を行列の**成分 (component)** といい，$A$ は簡略的に $A = (a_{ij})$ とあらわすことがある．

また，$n \times m$ 行列と $m \times l$ 行列間では積が定義され，$b_{1,1}, b_{2,1}, \cdots, b_{m,1}, b_{1,2}, \cdots, b_{m,l}$ により

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,l} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,l} \end{pmatrix}$$

と与えれば，

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1,i}b_{i,1} & \sum_{i=1}^m a_{1,i}b_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{1,i}b_{i,l} \\ \sum_{i=1}^m a_{2,i}b_{i,1} & \sum_{i=1}^m a_{2,i}b_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{2,i}b_{i,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{n,i}b_{i,1} & \sum_{i=1}^m a_{n,i}b_{i,2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{n,i}b_{i,l} \end{pmatrix}$$

のようにそれぞれの成分でベクトルの内積をするように定義され，$n \times l$ 行列となる．これより，行列の積は内積の性質を満たす．

特に $A$ について，$m = 1$ ならば $A$ を**列ベクトル**といい，$n = 1$ ならば**行ベクトル**という．また，$A$ は $f$ の**表現行列**もしくは**変換行列**という．

**定義 1.2**

1). $n \times n$ 行列，すなわち線型変換の表現行列を**正方行列 (square matrix)** という．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

正方行列の例

2). 全ての成分が 0 である行列を**零行列 (zero matrix)** といい，$m \times n$ の零行列を $O_{m,n}$ とあらわす．正方行列ならば $m$ と $n$ のどちらかを省略するとし，必要でなければ $m, n$ を省略する．

$$O_{3,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

零行列の例

3). 正方行列 $A = (a_{ij})$ で $i = j$ の成分を**対角成分**といい，対角成分以外が 0 である行列 $A$ を**対角行列 (diagonal matrix)** という．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

対角行列の例

4). 正方行列 $A = (a_{ij})$ で $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ となる行列 $A$ を**上三角行列**といい，$i < j$ ならば $a_{ij} = 0$ となる行列 $A$ を**下三角行列**といい，特に区別しない場合を**三角行列 (triangular matrix)** という．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

上三角行列の例　　下三角行列の例

5). $m \times n$ 行列 $A$ で，行と列を入れ替えることにより生成される $n \times m$ 行列を**転置行列 (transposed matrix)** といい，$A^T$ とあらわす．特に，$A = A^T$ となる行列 $A$ を**対称行列 (symmetric matrix)** といい，$A = -A^T$ となる行列 $A$ を**交代行列 (alternating matrix)** もしくは**歪対称行列 (skew-symmetric matrix)** という．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

対称行列の例　　交代行列の例

**定理 1.1**

行列 $A, B$ と $k \in \mathbb{R}$ による対称行列について，以下の関係式が成り立つ．

1). $(A^T)^T = A$.

2). $(kA)^T = kA^T$.

3). $A, B$ は加算可能で $(A + B)^T = A^T + B^T$.

4). $A, B$ は乗算可能で $(AB)^T = B^T A^T$.

*Proof.*

1)，2)，3) は明らかであるため，4) について示す．$A = (a_{ij}), B = (b_{jk})$ とすれば

$$(AB)^T = \left(\sum_j a_{ij} b_{jk}\right)^T = \left(\sum_j a_{kj} b_{ji}\right)$$

$$B^T A^T = (b_{kj})(a_{ji}) = \left(\sum_j a_{kj} b_{ji}\right)$$

となるため，$(AB)^T = B^T A^T$ である．

よって，命題は証明された．

□

## 1.2　逆行列

**定義 1.3**

恒等写像 $\mathrm{id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の表現行列を**単位行列 (identity matrix)** といい，$I_n$ もしくは $E_n$ とあらわす．必要がなければ $n$ を省略する．このとき $I$ は明らかに対角行列であり，

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

とあらわされる．

線型写像 $f, g$ の合成写像で $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ を満たすとする．$f$ の表現行列を $A$ としたとき，$g$ の表現行列を**逆行列 (inverse matrix)** といい，$A^{-1}$ とあらわす．また，$A$ を**可逆行列 (invertible matrix)** もしくは**正則行列 (regular matrix)**，単に**正則 (regular)** という．このことは単位行列 $I$ を用いることで $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ とあらわされ，$A$ は明らかに正方行列である．

**定理 1.2**

正則行列 $A$ の逆行列は一意に存在する．

*Proof.*

$A$ の逆行列が $X$ の他に $Y$ が存在したとすれば

$$AX - AY = A(X - Y) = O \ \Rightarrow\ X - Y = O \ \Rightarrow\ X = Y$$

となり，$X \neq Y$ の仮定に矛盾するため，$A$ の逆行列は一意である．

よって，命題は証明された．

□

**定理 1.3**

正則行列 $A, B$ とその逆行列 $A^{-1}, B^{-1}$ について，以下の関係式が成り立つ．

1). $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2). $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

*Proof.*

1) について，

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) =& A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) =& B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

より $B^{-1}A^{-1}$ が $AB$ の逆行列となるため $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となる．

2) について，定理 1.1 の 4) で $B = A^{-1}$ とおけば

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T \ \Rightarrow\ (A^{-1})^T A^T = I$$

となり，$A$ と $B$ の役割を入れ替えることで $(A^{-1})^T$ が $A^T$ の逆行列となることが得られる．

よって，命題は証明された．

□

これより，以下の系が得られる．

**系 1.3-1**　正則行列同士の積は正則である．

*Proof.*

定理 1.3 の 1) より正則行列の積の逆行列は，それぞれの正則行列の逆行列の積としてあらわされるため，正則行列の積も正則となる．

よって，命題は証明された．

□

**系 1.3-2**　非正則行列を含む行列の積は非正則である．

*Proof.*

系 1.3-1 と同様である．

□

**系 1.3-3**　行列 $A$ が正則ならば，その転置行列 $A^T$ も正則である．

*Proof.*

定理 1.3 の 2) より，$A^{-1}$ の転置行列は $A^T$ の逆行列であるため，$A$ が正則ならば $A^T$ も正則となる．

よって，命題は証明された．

□

ここで，正則行列が与えられたときに逆行列を計算する方法について考える．行列 $A$ の逆行列を $X$ としたとき，

$$AX = I, \quad XA = I$$

を $X$ について解くことにより得られる．ここで，$AX = I$ について考えるときに $A$ および $X$ を

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を解くということであるが，例えば $I$ の 1 列目に着目すれば

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

という変数 $x_{1,1}, x_{2,1}, \cdots, x_{n,1}$ についての線型連立方程式であることがわかり，これを $I$ の列分，すなわち $n$ 個の線型連立方程式を解くという操作になる．

連立方程式を解くには加減法か代入法といった解法が存在する．また，行列を用いて線型連立方程式を解くことを考えたとき，線型連立方程式を構成する要素として $X$ の成分である変数の係数だけ分かればいいため，$X$ は線型連立方程式においては冗長な表現である．そのため，行列にを用いた線型連立方程式の解法では差分法を用いて解くことを考える．

ここで，以下の定義を与える．

**定義 1.4**

行列 $A, X, B$ で $A, B$ を定数，$X$ を変数としたときによりあらわされる線型連立方程式 $AX = B$ を

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$$

とあらわしたものを**拡大行列 (augmented matrix)** といい，特に $A$ のような連立方程式の変数の係数を行列で表現したものを**係数行列 (coefficient matrix)** という．

この線型連立方程式を加減法で解くとき，加減法というのを拡大行列に適用するということ以下のようにまとめることができる．

1). 1 つの行に対して非 0 な数をかける．

2). 1 つの行に対してある数をかけたものを他の行に対して加算する．

3). 2 つの行を入れ替える．

このような拡大行列の変形を**行基本変形**といい，行基本変形を用いて線型連立方程式を解くことを**ガウスの消去法 (Gaussian elimination)** もしくは単に**消去法**という．

ガウスの消去法を用いて逆行列を求めることを考えたとき，考えることができるのは $AX = I$ という線型連立方程式であり，$XA = I$ の場合を考えることはできない．しかし，実際に考えるときは $AX = I$ を考えるだけで十分である．そのことについて，以下で示す．

**補題 1.1**　行基本変形はその操作に関して正則であり，その変形は行列の積により表現可能である．

*Proof.*

行基本変形の正則性は行基本変形が可逆であることを示せばいいが，それは定義から明らかである．また，行列の積により表現可能であるとは，行基本変形が線型写像であることを示せばいいが，それは定義から明らかである．

よって，命題は証明された．

□

**補題 1.2**　$m$ 次の正方行列 $A$ と $n$ 次の正方行列 $B$ を与えたとする．また，

$$C = \begin{pmatrix} A & O_{m,n} \\ O_{n,m} & B \end{pmatrix}$$

のように $m+n$ 次の正方行列 $C$ を与えたとき，$A, B$ が正則であるならば $C$ が正則であることは必要十分である．

*Proof.*

$A, B$ が正則ならば，$X$ を

$$X = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_{m,n} \\ O_{n,m} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

と与えることにより，$CX = XC = I_{m+n}$ より $X$ が $C$ の逆行列となる．

$C$ が正則ならば，$C$ の逆行列 $X$ を

$$X = \begin{pmatrix} X_{mm} & X_{m,n} \\ X_{n,m} & X_{nn} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$CX = \begin{pmatrix} AX_{mm} & AX_{m,n} \\ BX_{n,m} & BX_{nn} \end{pmatrix} = I_{m+n}$$
$$XC = \begin{pmatrix} X_{mm}A & X_{m,n}B \\ X_{n,m}A & X_{nn}B \end{pmatrix} = I_{m+n}$$

となるため，$AX_{mm} = X_{mm}A = I_m, BX_{nn} = X_{nn}B = I_n$ より $X_{mm}$ は $A$ の逆行列，$X_{nn}$ は $B$ の逆行列となる．

よって，命題は証明された．

□

**定理 1.4**

正方行列 $A$ に対して $AX = I$ を満たす正方行列 $X$ が存在するならば，$X$ は $A$ の逆行列である．これは $XA = I$ の場合も同様である．

*Proof.*

$A$ を $n$ 次の正方行列であるとして，$AX = I_n$ を満たす $X$ が逆行列であることを $n$ に関する数学的帰納法により示す．$n = 1$ のときはスカラーとして考えることができるため成り立つ．$n$ で成り立つとして，$n+1$ で成り立つことを

示す．$AX = I_{n+1}$ であるため $A$ に対して行基本変形をするとき，それを示す行列を $P$ とすれば $n$ 次の正方行列 $B$ を用いて

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

とすることができる．補題 1.1 より $P$ は正則であるため，$x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ と $n$ 次の正方行列 $X'$ を用いることで

$$XP^{-1} = \begin{pmatrix} x & \boldsymbol{x}_2^T \\ \boldsymbol{x}_1 & X' \end{pmatrix}$$

とすることができる．仮定より，$AX = I_{n+1}$ であるため

$$I_{n+1} = PAXP^{-1} = \begin{pmatrix} x & \boldsymbol{x}_2^T \\ B\boldsymbol{x}_1 & BX' \end{pmatrix}$$

となり，

$$\begin{cases} x = 1 \\ \boldsymbol{x}_2^T = \mathbf{0}^T \\ B\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0} \\ BX' = I_n. \end{cases}$$

数学的帰納法の仮定より $BX' = I_n$ なら $B$ は正則であり，補題 1.2 より $PA$ も正則である．$P$ は正則であるため，系 1.3-1 と系 1.3-2 から $A$ は正則である．

$XA = I_n$ となることを仮定した場合でも，両辺の転置をとり，$A^T X^T = I_n$ として定理 1.3 の 2) を適用することで $A$ は正則となる．

よって，命題は証明された．

□

定理 1.4 により，任意の正方行列 $A$ の逆行列を求めるには拡大行列

$$\left( \begin{array}{c|c} A & I \end{array} \right)$$

に対してガウスの消去法をすることで十分である．また，$A$ が非正則であるときは補題 1.1 と系 1.3-1 と系 1.3-2 から，$A$ は行基本変形により単位行列へと変換できないことがわかる．

## 1.3　階数

正方行列が正則性の意味について考える．このとき，以下の定理のような行列の不変量を与えることができる．

**定理 1.5**

正則な線型写像は像の次元に関して不変である．

*Proof.*

この命題は，線型写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を与えたとき，正則な線型写像 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ との合成写像で

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} (g \circ f) = \dim \operatorname{Im} (f \circ h)$$

を満たすということである．

まず，線型写像 $f$ による像の次元というのは，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ で $f(\boldsymbol{x})$ としたときの $f(\boldsymbol{x})$ を構成する基底の数である．ここで，$\dim \operatorname{Im} f$ というのは，$f$ の表現行列を $A$ として $A$ のそれぞれの列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}$ の成分 $x_1, x_2, \cdots, x_m \in \mathbb{R}$ としたとき

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m$$

となるため，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ から適当に選択して線型独立となるベクトルの最大の数である．つまり，線型独立であることの必要十分条件

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が正則な線型写像 $g, h$ が作用したことにより不変であることを示せばいい．

$g$ の表現行列を $B$ としたとき，$g \circ f$ では

$$\begin{aligned} BA\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ B^{-1}BA\boldsymbol{x} &= B^{-1}\boldsymbol{0} \\ A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となるため，不変である．$f \circ h$ では，$h$ の表現行列を $C$ として，まずは線型連立方程式

$$C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を考えれば，この両辺に $C$ の逆行列をかけることでこの線型連立方程式の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみとなる．ここで，$C$ のそれぞれの列ベクトルを $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_m \in \mathbb{R}^m$ とすれば

$$C\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{c}_1 + x_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{0}$$

となり，解が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ということは $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_m$ はそれぞれ線型独立となる．つまり，$\dim \mathbb{R}^m = \dim \mathrm{Im}\, h$ となり，$C\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の基底の取り方を線型写像 $h$ により変換したということであるため，$\dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Im}\, (f \circ h)$ となる．

よって，命題は証明された．

□

**定理 1.6**

$n$ 次の正方行列 $A$ が正則であることと，$A$ のそれぞれの列ベクトルが線型独立であることは必要十分である．

*Proof.*

$A$ が正則であるときは定理 1.5 よりそれぞれの列ベクトルは線型独立である．

$A$ のそれぞれの列ベクトルが線型独立であるとき，この仮定の下で $A$ を行基本変形をしたときに単位行列へと変換できることを示せばいい．仮定より $A$ のそれぞれの列ベクトルは線型独立であるため，補題 1.1 と定理 1.5 から行基本変形により $A$ の任意の $i$ 列目に対して $i$ 行目のみを 1 にすることが可能である．なぜならば，

1). $i$ 列目に 2 つ以上の非 0 の成分が存在すれば，1 つの非 0 となる成分の存在する行に着目して他の行の成分を 0 にすることが可能である．
2). $i$ 列目の全ての成分が 0 ならば線型従属な列ベクトルが存在することを意味し，補題 1.1 と定理 1.5 に矛盾する．
3). $i \neq j$ で $j$ 列目に対して $j$ 行目のみが 1 であり，$i$ 列目に対して $j$ 列目のみが 1 となるとき，系 1.3-3 と補題 1.1 より行基本変形は列にも適用することができ，$i$ 列目から $j$ 列目を引けば $i$ 列目の成分は全て 0 となるため，2) に帰着する．

となるためである．

よって，命題は証明された．

□

定理 1.5 と定理 1.6 から線型写像はその像の次元は線型写像の正則さをあらわす指標となる．また，この指標は補題 1.1 より行基本変形により三角行列へと変換したときの零ベクトルでない列ベクトルの数に等しい．

そこで，以下の定義を与える．

**定義 1.5**

線型写像 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ の正則さを示す指標の 1 つとして，線型独立性が非退化であることを示す指標を $f$ の表現行列 $A$ の**階数 (rank)** もしくは**ランク**といい，$\mathrm{rank}\, f$ もしくは $\mathrm{rank}\, A$ とあらわす．このとき，階数は以下の同値な定義により具体的な値が与えられる．

1)．$A$ の線型独立な列ベクトルの最大の数．

2)．$f$ の像の次元 $\dim \mathrm{Im}\, f$．

3)．行基本変形により三角行列へと変換したときの零ベクトルでない列ベクトルの数．

また，$f$ により次元が退化するとは，$\dim \mathrm{Im}\, f < \dim \mathbb{R}^m$ となることであるが，これは $f$ により零ベクトルへと変換されるベクトルの集合

$$\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m \mid f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$$

によるものである．このとき，この集合を線型写像 $f$ の**核 (kernel)** もしくは**カーネル**といい，$\mathrm{Ker}\, f$ とあらわす．

特に正方行列の正則であることの必要十分条件は以下のように与えられる．

**定理 1.7**

$n$ 次の正方行列 $A$ が正則である必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\, A = n.$$

*Proof.*

行列の階数の定義から自明である．

□

また，階数に関して以下の定理が成り立つ．

**定理 1.8　次元定理**

線型写像 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ ついて以下の関係式が成り立つ．

$$\mathrm{rank}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = m$$

これを**次元定理**という．

*Proof.*

$\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の基底により $\mathbb{R}^m$ が構成されることを示せばいい．$\mathrm{Ker}\, f$ の基底を $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_r\in\mathbb{R}^m$ として，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_s\in\mathbb{R}^m$ と合わせて $\mathbb{R}^n$ の基底を構成するとすれば，$f(\boldsymbol{b}_1),f(\boldsymbol{b}_2),\cdots,f(\boldsymbol{b}_s)$ が $\mathrm{Im}\, f$ の基底であることを示す．任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$ が $a_1,\cdots,a_r,b_1,\cdots,b_s\in\mathbb{R}$ を用いて

$$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{a}_r+b_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+b_s\boldsymbol{b}_s$$

とあらわされるとすれば，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) =& f(a_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{a}_r)+f(b_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+b_s\boldsymbol{b}_s)\\ =& f(b_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+b_s\boldsymbol{b}_s)\\ =& b_1f(\boldsymbol{b}_1)+\cdots+b_sf(\boldsymbol{b}_s) \end{aligned}$$

となるため，$f(\boldsymbol{b}_1),f(\boldsymbol{b}_2),\cdots,f(\boldsymbol{b}_s)$ が $\mathrm{Im}\, f$ を張ることがわかる．また，

$$\begin{aligned} b_1f(\boldsymbol{b}_1)+b_2f(\boldsymbol{b}_2)+\cdots+b_sf(\boldsymbol{b}_s) =& \boldsymbol{0}\\ f(b_1\boldsymbol{b}_1+b_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+b_s\boldsymbol{b}_s) =& \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

より $b_1,b_2,\cdots,b_s$ が非零であるとき

$$b_1\boldsymbol{b}_1+b_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+b_s\boldsymbol{b}_s\in\mathrm{Ker}\, f$$

となり，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ が $\operatorname{Ker} f$ の基底であることに矛盾するため，これを満たすのは $b_1 = b_2 = \cdots = b_s$ のときのみであり，$f(\boldsymbol{b}_1), f(\boldsymbol{b}_2), \cdots, f(\boldsymbol{b}_s)$ は線型独立である．つまり，$f(\boldsymbol{b}_1), f(\boldsymbol{b}_2), \cdots, f(\boldsymbol{b}_s)$ は $\operatorname{Im} f$ の基底であり，$r+s=m$ であることから定理を満たす．

よって，命題は証明された．

□

## 1.4　基底変換

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を基底を変換をして $\boldsymbol{x}$ の成分を変化させることを考える．$\boldsymbol{x}$ は基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ とそれに対応する成分 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ により

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

とあらわされるとし，これが基底変換により基底 $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n \in \mathbb{R}^n$ の場合における成分 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n \in \mathbb{R}$ が得られる．このとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n &= x'_1\boldsymbol{e}'_1 + x'_2\boldsymbol{e}'_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{e}'_n \\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \cdots & \boldsymbol{e}'_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ は線型独立であるため，これを列ベクトルとする行列は定理 1.6 より正則であり，

$$\begin{pmatrix}x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \cdots & \boldsymbol{e}'_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

が得られる．特に，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を列ベクトルとした行列が単位行列ならば

$$\begin{pmatrix}x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \cdots & \boldsymbol{e}'_n\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

とあらわすことができるが，このときの基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を**標準基底 (standard basis)** という．

また，正則行列 $A$ により $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ から $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ へと基底が変換される，すなわち

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \cdots & \boldsymbol{e}'_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}$$

が成り立つとするとき，

$$A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \cdots & \boldsymbol{e}'_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix}^{-1}$$

となるため定理 1.3 の 1) より

$$\begin{pmatrix}x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

となる．つまり，基底を変換することに対して $\boldsymbol{x}$ が不変になるように相補的に成分を基底とは逆に変換している．

また，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を標準基底として，ベクトルを成分 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ により

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n$$

と与えたとき，内積は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

と定義されるが，一般の座標系ではこのように定義されるべきではない．なぜならば，一般の座標系は標準基底による座標系により与えられるものであり，座標の表現方法が変わるだけで座標間における距離といった計量は変わらない．そのため，本質的に内積は座標系において不変量である．

そこで，$\boldsymbol{a}$ の基底を $\boldsymbol{b}$ の基底に対して相補的に与えることにより内積を座標系において不変量とすることを考える．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に対して相補的与えられる基底を $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \cdots, \boldsymbol{e}^n$ のように記述するとして，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ へと基底変換をするとする．このとき，基底変換後の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の成分をそれぞれ $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n \in \mathbb{R}, b'_1, b'_2, \cdots, b'_n \in \mathbb{R}$ として

$$\boldsymbol{a} = a'_1\boldsymbol{e}'^1 + a'_2\boldsymbol{e}'^2 + \cdots + a'_n\boldsymbol{e}'^n, \quad \boldsymbol{b} = b'_1\boldsymbol{e}'_1 + b'_2\boldsymbol{e}'_2 + \cdots + b'_n\boldsymbol{e}'_n$$

と記述され，

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = a'_1b'_1 + a'_2b'_2 + \cdots + a'_nb'_n$$

が成り立つように $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ を定める．$b'_1, b'_2, \cdots, b'_n$ は

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

と与えられる．次に，$a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ では

$$\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

という関係式から

$$\begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}A$$

となることがわかる．つまり，$\boldsymbol{b}$ に対しての基底を変換する行列が与えられたとき，その逆行列で $\boldsymbol{a}$ の基底を変換することにより $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は不変になる．

また，$\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \cdots, \boldsymbol{e}'_n$ と $\boldsymbol{e}'^1, \boldsymbol{e}'^2, \cdots, \boldsymbol{e}'^n$ 間の内積は，内積の線型性から

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_ib'_j(\boldsymbol{e}'^i\cdot\boldsymbol{e}'_j)$$

となるため，クロネッカーのデルタ $\delta_{ij}$ を用いれば

$$\boldsymbol{e}'^i\cdot\boldsymbol{e}'_j = \delta_{ij}$$

と与えられる．実際，標準基底では $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を標準基底とすれば任意の $k$ で $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}^k$ となるため，この与え方は well-defined である．ここで，$\boldsymbol{e}'^1, \boldsymbol{e}'^2, \cdots, \boldsymbol{e}'^n$ と $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \cdots, \boldsymbol{e}^n$ の関係を考えると，これらは

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}^1 + a_2\boldsymbol{e}^2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}^n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix}$$

のように成分との関係が与えられることから行ベクトルであり，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'^1 \\ \boldsymbol{e}'^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \cdots & \boldsymbol{e}'_n \end{pmatrix}$$

とまとめることができる．これに対して $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に関する基底変換の式を代入すれば

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \cdots & \boldsymbol{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'^1 \\ \boldsymbol{e}'^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 & \boldsymbol{e}'_2 & \cdots & \boldsymbol{e}'_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'^1 \\ \boldsymbol{e}'^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix} A^{-1}$$

といった $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ の基底変換とは対称的な関係となる．

これらのことをまとめることで，以下の定義を与えられる．

**定義 1.6**

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ に対して，基底を変換して $\boldsymbol{x}$ と同値な表現へと変換することを**基底変換 (change of basis)** という．基底変換では $\boldsymbol{x}$ の基底を正則行列 $A$ により基底変換したときを基準に考え，そのとき $A$ の変換に従う成分を**共変成分 (covariant component)**，$A^{-1}$ の変換に従う成分を**反変成分 (contravariant component)** という．

$\boldsymbol{x}$ の基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ としたとき，$A$ により変換した基底に対応する成分は $A^{-1}$ に従うため，反変成分をもつ．この反変成分は $x^1, x^2, \cdots, x^n$ のように添え字を上に付けて記述し，

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n$$

のようにあらわされるが，このようなベクトルを**反変ベクトル (contravariant vector)** という．特に，反変ベクトルの基底は $A$ の変換に従うため**共変基底 (covariant basis)** という．

内積は基底変換に対して不変，すなわち一般の座標系で不変であるり，それを表現するために反変ベクトルに対して相補的に与えられるベクトルの成分は $A$ の変換に従うため，共変成分をもつ．反変ベクトルの基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ に対して相補的に与えられる基底は添え字を上に付けて $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \cdots, \boldsymbol{e}^n$，反変ベクトルの成分に対して相補的に与えられる共変成分は添え字を下につけて $x_1, x_2, \cdots, x_n$ のように記述し，

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}^1 + x_2\boldsymbol{e}^2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}^n$$

のようにあらわされるが，このようなベクトルを**共変ベクトル (covariant vector)** という．特に，共変ベクトルの基底は $A^{-1}$ の変換に従うため**反変基底 (contravariant basis)** という．

それぞれの共変基底とそれに対する反変基底における内積ではクロネッカーのデルタ $\delta^i_j$ を用いることで

$$\boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta^i_j$$

が成り立ち，$\{\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^1, \cdots, \boldsymbol{e}^n\}$ は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ の**双対基底 (dual basis)** という．

また，標準基底においては反変ベクトルと共変ベクトルは一致し，行列による表現では反変ベクトルは列ベクトル，共変ベクトルは行ベクトルに相当する．これにより，一般の座標系における $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ 間での内積は $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ と $b^1, b^2, \cdots, b^n \in \mathbb{R}$ により

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}^1 + a_2\boldsymbol{e}^2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}^n, \quad \boldsymbol{b} = b^1\boldsymbol{e}_1 + b^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b^n\boldsymbol{e}_n$$

とあらわした共変ベクトルと反変ベクトルとの内積として定義され，これを整理することにより

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = a_1b^1 + a_2b^2 + \cdots + a_nb^n$$

のようになる．

反変ベクトルと共変ベクトルは互いに相互変換可能であり，以下の定理として与えられる．

**定理 1.9**

反変ベクトルと共変ベクトルはそれぞれ一意に相互変換可能である．

*Proof.*

ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が共変基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ と反変成分 $x^1, x^2, \cdots, x^n$，共変基底に対する反変基底 $\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \cdots, \boldsymbol{e}^n$ と反変成分に対する共変成分 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ により

$$\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + x^2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n = x_1\boldsymbol{e}^1 + x_2\boldsymbol{e}^2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}^n$$

とあらわされるとする．このとき，クロネッカーのデルタ $\delta^i_j$ により $\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta^i_j$ となるため，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = I$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}^{-1}.$$

また，成分については行列表示では共変ベクトルは反変ベクトルの転置となるため

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix}\right)^T$$

となり，定理 1.1 の 4) と定理 1.3 の 2) を用いることで

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}^1 \\ \boldsymbol{e}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}^n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$$

となり，共変成分についても同様に示すことができる．

よって，命題は証明された．

□