線型幾何 -ベクトルと幾何-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2019 年 7 月 29 日
最終更新 2019 年 7 月 29 日

目次

第 1 章

ベクトルの座標変換

1.1　スケール変換・鏡映変換

まず，ベクトルの成分を適当なスケールで変換することを考える．ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ により

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とあらわすとして，各成分を $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 倍するとすれば

$$\begin{pmatrix} a_1x_1 \\ a_2x_2 \\ \vdots \\ a_nx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

特に，スケール変換の定義から $\boldsymbol{x}$ の基底が直交基底かつ全ての $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の絶対値が 1 であるとき，この線型変換による像は原点を通る超平面に対する鏡映となることがわかる．

ここで，原点を通る任意の超平面で $\boldsymbol{x}$ の鏡映を生成することを考えれば，超平面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ を与えられる

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x}$$

は超平面から位置ベクトルとしたときの $\boldsymbol{x}$ までの距離である．つまり，鏡映を $\boldsymbol{x}'$ とすれば

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

と与えられることがわかる．また，これは変換行列としては

$$\boldsymbol{x}' = I\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x} = (I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)\boldsymbol{x}$$

のようになる．

これより，以下の定義が与えられる．

定義 1.1

$\mathbb{R}^n$ 上の原点を通る任意の超平面に対して $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ の鏡映 $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$ を生成するとき，超平面の単位法線ベクトル $\boldsymbol{u}$ により

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

と与えられる変換をハウスホルダー変換 **(Householder transformation)** という．また，これを示す変換行列

$$P = I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$$

をハウスホルダー行列 **(Householder matrix)** という．

特に，ハウスホルダー行列について以下の定理が与えられる．

定理 1.1

ハウスホルダー行列 P について，以下の性質が成り立つ．
1)．$P = P^T = P^{-1}$.
2)．$P^2 = I$.

Proof.
適当な単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を用いることで

$$P^T = (I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)^T = I - 2(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)^T = I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$$

となるため $P = P^T$ となり，

$$\begin{aligned} P^T P =& PP \\ =& (I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T)(I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T) \\ =& I - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T + 4\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^T \\ =& I - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T + 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \\ =& I \end{aligned}$$

となるため，$P^T = P^{-1}$ と $P^2 = I$ が得られる．
よって，命題は証明された．

□

このとき，n 次の正則行列 P が $P^T = P^{-1}$ を満たすとき，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ の内積について

$$(P\boldsymbol{u}) \cdot (P\boldsymbol{v}) = (P\boldsymbol{u})^T(P\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T(P^TP)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$$

となるため，$P^T = P^{-1}$ を満たす P と内積を不変に保つ線型変換は同値である．特に，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ とすれば

$$|P\boldsymbol{u}|^2 = (P\boldsymbol{u}) \cdot (P\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$$

となるため，P によるベクトルの変換について，変換の前後でその大きさは不変である．また，P の列ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n \in \mathbb{R}^n$ とすれば $PP^T = I$ より

$$PP^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} = I$$

となるため，P のそれぞれの列ベクトルは直交かつ単位ベクトルであることは $P^T = P^{-1}$ であることと同値であることがわかる．$|P\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}|$ について，i 行目の成分のみが 1 の列ベクトル $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n$ を考えれば，

$$P\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{p}_i$$

であり，$|P\boldsymbol{e}_i| = |\boldsymbol{e}_i|$ より $|\boldsymbol{p}_i| = 1$ である．$j(i \neq j)$ で $\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j$ でも同様に考えれば

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j| =& |\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{p}_j| \\ \sqrt{2} =& |\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{p}_j| \\ 2 =& (\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{p}_j) \cdot (\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{p}_j) \\ 2 =& 1 + \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j + 1 \\ \boldsymbol{p}_i \cdot \boldsymbol{p}_j =& 0 \end{aligned}$$

となるため，$|P\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}|$ であることと $P^T = P^{-1}$ は同値である．
これより，以下の定義が与えられる．

定義 1.2

正則行列 P について，以下の同値な性質を満たす P を**直交行列 (orthogonal matrix)** という．

1). $P^T = P^{-1}$ を満たす．

2). ベクトルを P により変換したとき，変換の前後で内積が不変である．

3). ベクトルを P により変換したとき，変換の前後でベクトルの大きさは不変である．

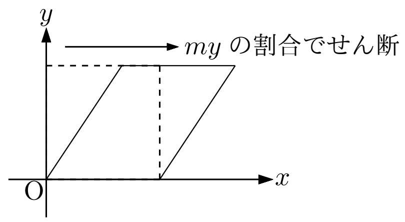
4). P のそれぞれの列ベクトルは直交かつ単位ベクトルである．

特に，座標系を構成する基底がそれぞれ直交かつ単位ベクトルであるとき，それらの基底を**正規直交基底 (orthonormal basis)** といい，その必要十分条件は $PP^T = I$ となることであるため，P が直交行列であることと P の列ベクトルが正規直交基底を構成することは同値である．

これらにより，ハウスホルダー行列は直交行列であり，それらに関する性質をすべて満たすことがわかる．

1.2　せん断変形

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ をせん断することを考える．まず，標準基底による xy 座標系での x 軸に平行なせん断を考えると，



のような変形をし，これを式であらわすと

$$\begin{pmatrix} x + my \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

一般の場合も同様にして，$\boldsymbol{x}$ の成分の順序を無視するとして，適当な $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m (m \leq n), \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-m}$ により直和分解する，すなわち

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

とあらわされるとする．このとき，$\boldsymbol{v}$ に平行なせん断を考えれば，適当な $m \times (n-m)$ 行列 M を用いて

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} + M\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & M \\ O_m & I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

のようにあらわされる．

1.3　回転変換

まずは $\mathbb{R}^3$ の標準基底による xyz 右手座標系における回転について考える．なお，このとき変換前の座標を (x, y, z) として，変換後の座標を (x', y', z') とする．

z 軸を中心とした回転，すなわち xy 平面上での回転を考えると，x, y と x', y' の状態を $r, \alpha, \theta \in \mathbb{R}$ 極座標により

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = r\cos(\alpha + \theta) \\ y' = r\sin(\alpha + \theta) \end{cases}$$

とすることにより三角関数の加法定理から

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha + \theta) = r(\cos\alpha\cos\theta - \sin\theta\sin\alpha) = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = r\sin(\alpha + \theta) = r(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = y\cos\theta + x\sin\theta \end{cases}$$

となるため，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

同様にして，x 軸を中心とした回転，すなわち yz 平面上での回転を考えると，y, z と y', z' の状態は

$$\begin{cases} y = r\cos\alpha \\ z = r\sin\alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} y' = r\cos(\alpha+\theta) = y\cos\theta - z\sin\theta \\ z' = r\sin(\alpha+\theta) = z\cos\theta + y\sin\theta \end{cases}$$

となるため，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

y 軸を中心とした回転，すなわち zx 平面上での回転を考えると，x, z と x', z' の状態は

$$\begin{cases} z = r\cos\alpha \\ x = r\sin\alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} z' = r\cos(\alpha+\theta) = z\cos\theta - x\sin\theta \\ x' = r\sin(\alpha+\theta) = x\cos\theta + z\sin\theta \end{cases}$$

となるため，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

これより，以下の定義が与えられる．

定義 1.3

$\mathbb{R}^3$ の標準基底による xyz 右手座標系における変数 $\theta \in \mathbb{R}$ を用いた線型変換の表現行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

はそれぞれ x 軸を中心とした，y 軸を中心とした，z 軸を中心とした角度 θ だけベクトルを回転させる変換であり，これらを**回転行列 (rotation matrix)** という．

次に，$\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ におけるベクトルの原点を中心とした回転について考える．$\mathbb{R}^n$ でも $\mathbb{R}^3$ の場合と同様にして $\mathbb{R}^n$ 上で 2 本の正規直交基底 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ を選択して，ベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ により張られる平面 P 上を回転するものである．この回転は，P のうち原点を通るものを P_0 として，P_0 上へと $\boldsymbol{v}$ を射影して P_0 上で原点を中心に回転，そして P へと平行移動させることで達成する．まず，P_0 上への $\boldsymbol{v}$ の射影 $\boldsymbol{v}_p \in \mathbb{R}^n$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が単位ベクトルであることから

$$\boldsymbol{v}_p = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{y})\boldsymbol{y}$$

となる．次に，$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_p$ が P に直交することを示す．

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_p) \cdot \boldsymbol{x} =& \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_p \cdot \boldsymbol{x} \\ =& \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} - ((\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x})) \\ =& \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} \\ =& 0 \\ (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_p) \cdot \boldsymbol{y} =& \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}_p \cdot \boldsymbol{y} \\ =& \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{y} - ((\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y})) \\ =& \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{y} \\ =& 0 \end{aligned}$$

これにより，$\boldsymbol{v}$ が P 上で原点を中心に回転するときに回転する成分 $\boldsymbol{v}_p$ と回転しない成分 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_p$ に分割されることが示され，$\boldsymbol{v}_p$ を P_0 上で回転したものを $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_p$ だけ平行移動することで P 上で $\boldsymbol{v}$ を回転したことになる．P_0 上での

回転後の座標を $\boldsymbol{v}_p'$ とすれば，$\mathbb{R}^3$ の場合と同様にして

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_p\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{v}_p|\cos\alpha\\ \boldsymbol{v}_p\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{v}_p|\sin\alpha\end{cases},\quad\begin{cases}\boldsymbol{v}_p'\cdot\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{v}_p|\cos(\alpha+\theta)=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\cos\theta-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})\sin\theta\\ \boldsymbol{v}_p'\cdot\boldsymbol{y}=|\boldsymbol{v}_p|\sin(\alpha+\theta)=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})\cos\theta+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\sin\theta\end{cases}$$

となり，P 上での回転後の $\boldsymbol{v}'$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}'=&(\boldsymbol{v}_p'\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{v}_p'\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_p)\\=&((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\cos\theta-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})\sin\theta)\boldsymbol{x}+((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})\cos\theta+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\sin\theta)\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{y})\\=&\boldsymbol{v}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\cos\theta-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})\sin\theta-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}\\(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})\cos\theta+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\sin\theta-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\\=&\boldsymbol{v}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta-1&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

とあらわされる．実際，$\mathbb{R}^3$ の場合の z 軸を中心とする回転では

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

のように正規直交基底を選択することで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}'=&\boldsymbol{v}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta-1&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\\=&\boldsymbol{v}+\begin{pmatrix}(\cos\theta-1)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})-\sin\theta(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})\\\sin\theta(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})+(\cos\theta-1)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y})\\0\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

となり，回転行列が得られる．

ここで，$\mathbb{R}^3$ 上で単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を回転軸として回転する場合を考える．$\boldsymbol{x}=\frac{1}{|\boldsymbol{v}_p|}\boldsymbol{v}_p$ とすれば，$\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が直交することに留意することで

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{v}_p|}(\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n})\\\boldsymbol{y}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{x}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{v}_p|}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\end{cases}$$

となるため，これを $\mathbb{R}^n$ における回転の式に代入することで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}'=&\boldsymbol{v}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta-1&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\boldsymbol{v}_p|\\0\end{pmatrix}\\=&\boldsymbol{v}+|\boldsymbol{v}_p|\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}&\boldsymbol{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta-1\\\sin\theta\end{pmatrix}\\=&\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n})(\cos\theta-1)+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\sin\theta\end{aligned}$$

といった式が得られる．

ここで，この式をさらに簡約化するために以下の定理を与える．

定理 1.2

ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ により，以下の関係式が成り立つ．

1). $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

2). $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

1) についてを**スカラー 3 重積 (scalar triple product)** といい，2) についてを**ベクトル 3 重積 (vector triple product)** という．

Proof.

$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3), \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3), \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ とする．

1) について，外積の定義より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} =&(b_2c_3-b_3c_2, b_3c_1-b_1c_3, b_1c_2-b_2c_1)\\ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} =&(c_2a_3-c_3a_2, c_3a_1-c_1a_3, c_1a_2-c_2a_1)\\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} =&(a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)\end{aligned}$$

となるため，これらに対して内積を適用することで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) =&a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1\\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) =&b_1c_2a_3-b_1c_3a_2+b_2c_3a_1-b_2c_1a_3+b_3c_1a_2-b_3c_2a_1\\ \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) =&c_1a_2b_3-c_1a_3b_2+c_2a_3b_1-c_2a_1b_3+c_3a_1b_2-c_3a_2b_1\end{aligned}$$

となり，成り立つことが確かめられる．

2) について，第 1 成分について展開すると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}))_1 =&a_2(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_3-a_3(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_2\\ =&a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)\\ =&a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3\\ ((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c})_1 =&(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1\\ =&a_2c_2b_1+a_3c_3b_1-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1\end{aligned}$$

となり，成り立つことが確かめられる．他の成分でも同様である．

よって，命題は証明された．

□

定理 1.2 から

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} =&(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}\\ =&(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}-\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n})\\ =&\boldsymbol{v}+\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

となるため，

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})(1-\cos\theta)+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\sin\theta.$$

ここで，

$$\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

とあらわすとすれば，$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}$ は

$$\begin{pmatrix}0&-n_3&n_2\\n_3&0&-n_1\\-n_2&n_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=N\boldsymbol{v}$$

とあらわされることから

$$\boldsymbol{v}'=(I+N^2(1-\cos\theta)+N\sin\theta)\boldsymbol{v}$$

のように表現行列を与えることができる．

このことについて以下にまとめる．

定義 1.4

$\mathbb{R}^3$ において，$\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$ を角度 $\theta\in\mathbb{R}$ だけ回転軸を示す単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ で回転をするとき，

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})(1-\cos\theta)+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})\sin\theta$$

と与えられ，

$$\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&-n_3&n_2\\n_3&0&-n_1\\-n_2&n_1&0\end{pmatrix}$$

とすれば，この変換を示す回転行列は

$$I + N^2(1 - \cos\theta) + N\sin\theta$$

と与えられる．これを**ロドリゲスの回転公式 (Rodrigues' rotation formula)** という．

1.4　アフィン写像

一般に線型写像では原点を中心とした変換を考えており，基本的な幾何学的変換操作である平行移動をすることができない．そこで，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を行列 A により変換するとき，平行移動 $\boldsymbol{b}$ を

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように便宜的に次元を拡張することで平行移動を含んだ変換となる．また，A が正則ならば

$$\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

となり，

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

が逆行列となるため，平行移動という操作は可逆であることの直感に従う．

これより，以下の定義を与えられる．

定義 1.5

線型写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が平行移動を伴うとき，f を**アフィン写像 (affine map)** といい，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ に対して f を適用するとき f は $n \times m$ 行列 A と平行移動 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ を用いて

$$A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

のようにあらわされる．特に，A が正方行列であるとき，アフィン写像は**アフィン変換 (affine transformation)** という．また，アフィン変換において，A が正則であるならばアフィン変換を示す行列は正則である．

第 2 章

幾何学的性質を保つ射影

2.1　垂直投影

射影は一般に内積により考えるが，内積による射影では次元が退化するため幾何学的性質が失われる．そこで，超平面への射影に限定して考えることで，退化した次元に対して超平面からの距離のパラメータを付与することで退化した次元を補間して射影後でも幾何学的性質を保つ，すなわち可逆な射影となる．

$\mathbb{R}^n(n \geq 2)$ から $\mathbb{R}^n$ 上の任意の超平面 P への射影をすることを考える．まず，$\mathbb{R}^n$ の任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots .\boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ と成分 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ により

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

とあらわされるとする．また，標準基底による座標系を W とする．

超平面 P 上での $\boldsymbol{x}$ は正規直交基底を $\boldsymbol{e}_{1_c}, \boldsymbol{e}_{2_c}, \cdots .\boldsymbol{e}_{n_c} \in \mathbb{R}^n$，成分を $x_{1_c}, x_{2_c}, \cdots, x_{n_c} \in \mathbb{R}$ として，W の原点から P の原点への相対位置を $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ とすれば

$$\boldsymbol{x} = x_{1_c}\boldsymbol{e}_{1_c} + x_{2_c}\boldsymbol{e}_{2_c} + \cdots + x_{n_c}\boldsymbol{e}_{n_c} + \boldsymbol{c}$$

とあらわされる．なお，$\boldsymbol{e}_{n+1_c}$ は P の単位法線ベクトルかつ W を射影をする方向であるとする．

$\boldsymbol{c}$ が W 上で表現されるベクトルとすれば $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots .\boldsymbol{e}_n$ を列ベクトルとする行列は単位行列で $\boldsymbol{e}_{1_c}, \boldsymbol{e}_{2_c}, \cdots .\boldsymbol{e}_{n_c}$ を列ベクトルとする行列は直交行列であるため，W から P への基底変換は

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \boldsymbol{c} \right) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{1_c} & \boldsymbol{e}_{2_c} & \cdots & \boldsymbol{e}_{n_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1_c} \\ x_{2_c} \\ \vdots \\ x_{n_c} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_{1_c} \\ x_{2_c} \\ \vdots \\ x_{n_c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{1_c} & \boldsymbol{e}_{2_c} & \cdots & \boldsymbol{e}_{n_c} \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \boldsymbol{c} \right) \\
\begin{pmatrix} x_{1_c} \\ x_{2_c} \\ \vdots \\ x_{n_c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{1_c}^T \\ \boldsymbol{e}_{2_c}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{n_c}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{1_c} \cdot \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{e}_{2_c} \cdot \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_{n_c} \cdot \boldsymbol{c} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるため，アフィン変換により

$$\begin{pmatrix} x_{1_c} \\ x_{2_c} \\ \vdots \\ x_{n_c} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{1_c}^T & -\boldsymbol{e}_{1_c} \cdot \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{e}_{2_c}^T & -\boldsymbol{e}_{2_c} \cdot \boldsymbol{c} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{n_c}^T & -\boldsymbol{e}_{n_c} \cdot \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

とあらわされる．これにより，$x_{1_c}, x_{2_c}, \cdots, x_{n-1_c}$ は P 上での座標であり，x_{n_c} は $\boldsymbol{x}$ から P への距離を示す．特に，x_{n_c} は $x_{n_c} > 0$ で P の裏側で $x_{n_c} < 0$ で P の表面，$|x_{n_c}|$ が小さければ小さいほど $\boldsymbol{x}$ は P に近いことを示す．

これより，以下の定義を与えることができる．

定義 2.1

$\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ の標準基底による座標系 W から正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ による正規直交系 P へと基底変換するとき，W の原点から P の原点への相対位置 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ を W 上で表現されるベクトルとすれば，基底変換の行列は

$$V = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1^T & -\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{e}_2^T & -\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{c} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^T & -\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられる．P が $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^{n-1}$ への射影を与えるための $\boldsymbol{e}_n$ を法線ベクトルとする超平面であるならば，V を**ビュー行列 (view matrix)** という．これは定義より明らかに正則である．

ここで，射影する対象の領域が有限の場合を考える．このとき，領域は P に平行な

$$D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, l_i, r_i \in \mathbb{R} \ s.t.\ l_i < x_i < r_i\}$$

のような n 次の直方体領域として与えられる．射影する対象の領域が有限であるときは，領域を正規化して考えることができ，実際にそうするべきである．なぜならば，現在は内積による射影の可逆化，すなわち P に対して直交に射影する場合を考えているが，他の射影方式でも統一的に考えるためである．

ここでの正規化というのは

$$D' = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, -1 < x_i < 1\}$$

のような超立方体領域への変換 $D \to D'$ である．この正規化は D を原点まで平行移動して l_i, r_i の値を用いてスケーリングすることにより達成することができる，すなわちアフィン変換により

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r_1-l_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r_2-l_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{r_n-l_n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{r_1+l_1}{2} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{r_2+l_2}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{r_n+l_n}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r_1-l_1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{r_1+l_1}{r_1-l_1} \\ 0 & \frac{2}{r_2-l_2} & \cdots & 0 & -\frac{r_2+l_2}{r_2-l_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{r_n-l_n} & -\frac{r_n+l_n}{r_n-l_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と与えることができる．

これより，以下の定義を与えることができる．

定義 2.2

超平面への射影のうち，射影をする方向と超平面が常に直交するようなものを**直交射影 (orthogonal projection)** もしくは**垂直投影 (orthogonal projection)** という．射影をする対象の領域が有限であれば

$$D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, l_i, r_i \in \mathbb{R} \ s.t.\ l_i < x_i < r_i\}$$

のように n 次の直方体として与えられ，これは

$$D' = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, -1 < x_i < 1\}$$

のような超立方体領域へと正規化することが可能である．このとき，$D \to D'$ へと正規化するための行列は

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{r_1-l_1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{r_1+l_1}{r_1-l_1} \\ 0 & \frac{2}{r_2-l_2} & \cdots & 0 & -\frac{r_2+l_2}{r_2-l_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{r_n-l_n} & -\frac{r_n+l_n}{r_n-l_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とあらわされ，これを垂直投影における**射影行列 (projection matrix)** という．特に，この変換における変換後の成分 x_n は超平面からの距離のパラメータを示しており，これを**深度値 (depth value)** という．

垂直投影における深度値は $[-1, 1]$ で -1 に近いほど射影前の元の座標は P から遠く，1 に近いほど P に近いことを示すが，一般にはその逆を考える場合が多い．また，このような遠近に則って l_n と r_n は常に負として

$$near = |r_n|, \quad far = |l_n|$$

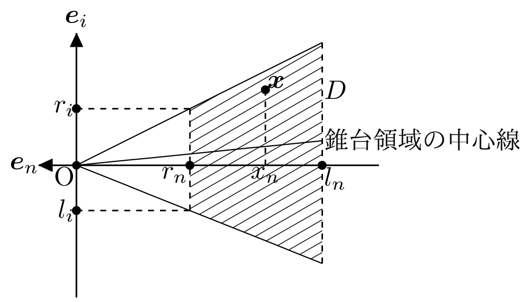
と定義することがある．このとき，垂直投影における変換行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r_1-l_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r_2-l_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{-2}{far-near} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{r_1+l_1}{2} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{r_2+l_2}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{far+near}{2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r_1-l_1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{r_1+l_1}{r_1-l_1} \\ 0 & \frac{2}{r_2-l_2} & \cdots & 0 & -\frac{r_2+l_2}{r_2-l_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{-2}{far-near} & -\frac{far+near}{far-near} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2　透視投影

垂直投影では 3 次元空間上で観測される遠近感を表現することは不可能である．そこで，$\mathbb{R}^n$ 上の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ により $\boldsymbol{e}_n$ を法線かつ射影方向とする超平面を構成する座標系として，$\boldsymbol{e}_n$ の成分が負に大きいほど射影したときに小さくなる方法を考える．

このとき，



のような斜線の錐台領域 D を超平面領域

$$P = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n \,|\, l_i, r_i \in \mathbb{R} \; s.t. \; l_i < x_i < r_i\}$$

へと射影するとすれば，P に近いほど P への像は大きくなり，遠いほど P への像は小さくなる．また，$r_n \to -0$ とすれば像は存在しえなくなるため，$r_n < 0$ であるとする．

D 内に存在する位置ベクトル $\boldsymbol{x} \in D$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^* \\ x_n \end{pmatrix}$$

とあらわせば，相似関係より P への像 $\boldsymbol{x}_P$ は

$$\boldsymbol{x}_P = \begin{pmatrix} \frac{r_n}{x_n}\boldsymbol{x}^* \\ x_n \end{pmatrix}$$

となるが，x_n で割るという操作は線型操作でないため，線型写像によりあらわすことはできない．

この問題を解決するために以下の定義を与える．

定義 2.3

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して次元を 1 つ拡張して $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x_{n+1}}\boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

としたものを**同次座標系 (homogeneous coordinates)** という．これはアフィン変換の行列表現等であらわれる．特に，同次座標系における変換を**同次変換 (homogeneous transformation)** という．

まず，垂直投影と同様にして正規化することを考えれば，P の中心を原点まで平行移動するが，平行移動では D のうち r_n の位置では正規化することができるが，$[r_n, l_n]$ の区間に亘って正規化をすることはできない．この場合における正規化のための平行移動について考えると，D の中心線を $\boldsymbol{e}_n$ に一致させる変形，すなわち $\boldsymbol{e}_n$ に垂直なせん断変形をすることであるとわかる．D の中心線の傾きは

$$\frac{\frac{r_i+l_i}{2}}{r_n} = \frac{r_i + l_i}{2r_n}$$

となるため，このせん断変形は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\frac{r_1+l_1}{2r_n} & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\frac{r_2+l_2}{2r_n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{r_{n-1}+l_{n-1}}{2r_n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のような表現行列として与えられる．なお，この時点では $\boldsymbol{e}_n$ の成分については平行移動をしていない．

次に，同次座標系によるスケールの変換と $\boldsymbol{e}_n$ の成分の平行移動について考える．このとき，行列による変換前の位置ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ と変換後の位置ベクトル $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

とすれば変換後の同次座標系の表現では

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ x_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{x_n}\boldsymbol{x}' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

成分 x_n，すなわち $[l_n, r_n]$ は同次変換により $\left[-\frac{r_n-l_n}{2}, \frac{r_n-l_n}{2}\right]$ へと平行移動するが，射影後で x_n は P に影響を与えないため，この同次変換が可逆かつ，x_n に関する同次変換を f としたとき $x_{n_1}, x_{n_2} \in [r_n, l_n]$ で

$$x_{n_1} < x_{n_2} \;\Leftrightarrow\; f(x_{n_1}) < f(x_{n_2})$$

のように f が順序同型写像となれば十分である．このとき，

$$f(x_n) = -\frac{r_n l_n}{x_n} + \frac{r_n + l_n}{2}$$

とすれば f について

$$f(l_n) = -r_n + \frac{r_n + l_n}{2} = -\frac{r_n - l_n}{2}, \quad f(r_n) = -l_n + \frac{r_n + l_n}{2} = \frac{r_n - l_n}{2}$$

となるため，x_n につういての同次変換はこのように与えればいい．これにより，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ の関係は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{x_n}\boldsymbol{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r_n}{x_n}x_1 \\ \frac{r_n}{x_n}x_2 \\ \vdots \\ \frac{r_n}{x_n}x_{n-1} \\ -\frac{r_n l_n}{x_n} + \frac{r_n+l_n}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n x_1 \\ r_n x_2 \\ \vdots \\ r_n x_{n-1} \\ -r_n l_n + \frac{r_n+l_n}{2}x_n \\ x_n \end{pmatrix}$$

となるため，変換行列は

$$\begin{pmatrix} r_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{r_n+l_n}{2} & -r_n l_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように与えられる．

これに対して垂直投影と同様にして超立方体領域

$$D' = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, -1 < x_i < 1\}$$

で $D \to D'$ のような正規化をすることで変換行列が得られる．

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r_1-l_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r_2-l_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{r_n-l_n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{r_n+l_n}{2} & -r_n l_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -\frac{r_1+l_1}{2r_n} & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -\frac{r_2+l_2}{2r_n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{r_{n-1}+l_{n-1}}{2r_n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

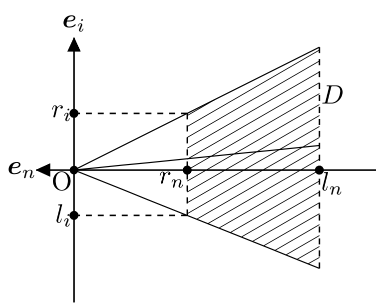
$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{r_1-l_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r_2-l_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{r_n-l_n} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_n & 0 & \cdots & 0 & -\frac{r_1+l_1}{2} & 0 \\ 0 & r_n & \cdots & 0 & -\frac{r_2+l_2}{2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n & -\frac{r_{n-1}+l_{n-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{r_n+l_n}{2} & -r_n l_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2r_n}{r_1-l_1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{r_1+l_1}{r_1-l_1} & 0 \\ 0 & \frac{2r_n}{r_2-l_2} & \cdots & 0 & -\frac{r_2+l_2}{r_2-l_2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2r_n}{r_{n-1}-l_{n-1}} & -\frac{r_{n-1}+l_{n-1}}{r_{n-1}-l_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{r_n+l_n}{r_n-l_n} & -\frac{2r_n l_n}{r_n-l_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これより，以下の定義を与えることができる．

定義 2.4

$\mathbb{R}^n$ 上の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{R}^n$ により $\boldsymbol{e}_n$ を法線かつ射影方向とする超平面を構成する座標系として，



のような斜線の錐台領域 D を超平面領域

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n \,|\, l_i, r_i \in \mathbb{R} \ s.t.\ l_i < x_i < r_i\}$$

へと射影するとする．超立方体領域

$$D' = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, -1 < x_i < 1\}$$

により $D \to D'$ のような正規化をするとき，その行列は

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2r_n}{r_1 - l_1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{r_1 + l_1}{r_1 - l_1} & 0 \\ 0 & \frac{2r_n}{r_2 - l_2} & \cdots & 0 & -\frac{r_2 + l_2}{r_2 - l_2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2r_n}{r_{n-1} - l_{n-1}} & -\frac{r_{n-1} + l_{n-1}}{r_{n-1} - l_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{r_n + l_n}{r_n - l_n} & -\frac{2r_n l_n}{r_n - l_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とあらわされる．このような変形を**透視投影 (perspective projection)** といい，P を透視投影における**射影行列 (projection matrix)** という．

垂直投影と同様にして，透視投影における深度値は $[-1, 1]$ で -1 に近いほど射影前の元の座標は P から遠く，1 に近いほど P に近いことを示すが，一般にはその逆を考える場合が多い．このような遠近を

$$near = |r_n|, \quad far = |l_n|$$

と定義すれば，透視投影における表現行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r_1 - l_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{r_2 - l_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{-2}{far - near} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -near & 0 & \cdots & 0 & -\frac{r_1 + l_1}{2} & 0 \\ 0 & -near & \cdots & 0 & -\frac{r_2 + l_2}{2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -near & -\frac{r_{n-1} + l_{n-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{far + near}{2} & -far \times near \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2near}{r_1 - l_1} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{r_1 + l_1}{r_1 - l_1} & 0 \\ 0 & -\frac{2near}{r_2 - l_2} & \cdots & 0 & -\frac{r_2 + l_2}{r_2 - l_2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{2near}{r_{n-1} - l_{n-1}} & -\frac{r_{n-1} + l_{n-1}}{r_{n-1} - l_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{far + near}{far - near} & \frac{2far \times near}{far - near} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となるが，同次座標系の表現に則れば成分全体の符号を反転させてもいいため

$$\begin{pmatrix} \frac{2near}{r_1 - l_1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{r_1 + l_1}{r_1 - l_1} & 0 \\ 0 & \frac{2near}{r_2 - l_2} & \cdots & 0 & \frac{r_2 + l_2}{r_2 - l_2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2near}{r_{n-1} - l_{n-1}} & \frac{r_{n-1} + l_{n-1}}{r_{n-1} - l_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{far + near}{far - near} & -\frac{2far \times near}{far - near} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

のようにあらわすことができる．