線型幾何 -行列式-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2019 年 8 月 3 日
最終更新 2019 年 8 月 3 日

目次

第 1 章

行列式

1.1 行列式の定義

正規直交系における n 本のベクトルにより張られる領域の体積について考える．2 本のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix}$$

と与えたとき，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ により張られる面積 V_2 は平行四辺形となるため，$\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ の成す角 θ により，外積の関係式から

$$V_2 = |\boldsymbol{x}_1||\boldsymbol{x}_2| \sin\theta = |x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}|$$

と与えられる．同様にして，3 本のベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3 \in \mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{1,1} \\ y_{1,2} \\ y_{1,3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{2,1} \\ y_{2,2} \\ y_{2,3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{3,1} \\ y_{3,2} \\ y_{3,3} \end{pmatrix}$$

と与えたとき，$\boldsymbol{y}_1$ と $\boldsymbol{y}_2$ と $\boldsymbol{y}_3$ により張られる体積 V_3 は平行六面体となるため，スカラー 3 重積から

$$\begin{aligned} V_3 =& |\boldsymbol{y}_1 \cdot (\boldsymbol{y}_2 \times \boldsymbol{y}_3)| \\ =& |y_{1,1}y_{2,2}y_{3,3} - y_{1,1}y_{2,3}y_{3,2} + y_{1,2}y_{2,3}y_{3,1} - y_{1,2}y_{2,1}y_{3,3} + y_{1,3}y_{2,1}y_{3,2} - y_{1,3}y_{2,2}y_{3,1}| \end{aligned}$$

と与えられる．

ここで，V_2 と V_3 のそれぞれを構成する積の項のベクトルの成分の 2 番目の添え字による列に着目すると，その列が偶置換により構成可能なら符号は正，奇置換なら符号は負，すなわち対称群 $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ の元により

$$V_2 = \left| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \right|, \quad V_2 = \left| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \operatorname{sgn}(\sigma) y_{1,\sigma(1)} y_{2,\sigma(2)} y_{3,\sigma(3)} \right|$$

とあらわされ，1 番目の添え字に着目した場合でも

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1),1} x_{\sigma(2),2} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \\ \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \operatorname{sgn}(\sigma) y_{\sigma(1),1} y_{\sigma(2),2} y_{\sigma(3),3} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \operatorname{sgn}(\sigma) y_{1,\sigma(1)} y_{2,\sigma(2)} y_{3,\sigma(3)} \end{cases}$$

となることが確かめられる．

これをより一般に考えるために以下の定義を与える．

定義 1.1

n 次の正方行列 $A = (a_{i,j})$ について，対称群 $\mathfrak{S}_n$ を用いて

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

と与えられる量を行列式 **(determinant)** といい，$|A|$ や $|a_{i,j}|$，$\det(a_{i,j})$ とあらわすこともある．

定理 1.1

n 次の正方行列 $A=(a_{i,j}), B=(b_{i,j})$ の行列式について，以下の性質が成り立つ．

1). $\det A^T=\det A$.

2). A の相異なる 2 つの行を入れ替えると符号が変わる．

3). A の 1 つの行に定数 $c\in\mathbb{R}$ をかけたとき，行列式は $c\det A$ となる．

4). A の 1 つの行の各成分が 2 数の和としてあらわされているとき，$\det A$ はその行を一方の数のみで置き換えた行列 A' による行列式と他方のみを置き換えた行列 A'' による行列式の和となる．

5). A の行のうち，2 つの行が等しいならば $\det A=0$.

6). $\det(AB)=\det A\det B$.

7). A が正則 $\Leftrightarrow$ $\det A\neq 0$.

Proof.

1) について，A^T の行列式は

$$\det A^T=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}$$

とあらわされ，置換 σ は全単射であることから $\sigma^{-1}(\sigma(i))=i$ となり，

$$\det A^T=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),\sigma^{-1}(\sigma(i))}.$$

$\{\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)\}$ は $\{1,2,\cdots,n\}$ を並び替えたものであることから，任意の $j\in\mathbb{N}(1\leq j\leq n)$ に対して $\sigma(i)=j$ を満たす i がただ 1 つ存在し，$\operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$ となるため

$$\det A^T=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{j,\sigma^{-1}(j)}=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\prod_{j=1}^{n}a_{j,\sigma^{-1}(j)}=\det A.$$

2) について，A の行を入れ替えることにより行列式の符号が反転するということであるため，列 $S=\{1,2,\cdots,k\}$ が与えられたときに 1 と k を入れ替える操作が奇数個の互換によって成すことを示せばいい．これを数学的帰納法により示す．$k=2$ のときは 1 回の互換となるため，命題を満たす．k で成り立つことを仮定すれば，$k+1$ のとき

$$\begin{aligned}&1,2,\cdots,k+1\\ \Rightarrow\ &2,1,\cdots,k+1\\ \Rightarrow\ &2,k+1,\cdots,1\\ \Rightarrow\ &k+1,2,\cdots,1\end{aligned}$$

となるが，それぞれの操作は奇数個の互換によって成されるため，任意の k について 1 と k の操作は奇数個の互換によって成される．

3) について，i 行目に c をかけるとすれば，その行列式は

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots ca_{i,\sigma(i)}\cdots a_{n,\sigma(n)}=c\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}=c\det A.$$

4) について，i 行目が $a'_{i,1},a'_{i,2},\cdots,a'_{i,n}\in\mathbb{R}$ との和によってあらわされているとすれば

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots(a_{i,\sigma(i)}+a'_{i,\sigma(i)})\cdots a_{n,\sigma(n)}\\ =&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{i,\sigma(i)}\cdots a_{n,\sigma(n)}+\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}\cdots a'_{i,\sigma(i)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\\ =&\det A'+\det A''.\end{aligned}$$

5) について，A の等しい 2 つの行を入れ替えたとき，2) から

$$\det A = -\det A \Leftrightarrow 2\det A = 0$$

となるため，A の行列式は 0 となる．

6) について，A と B が正則である場合とそうではない場合に分けて示す．まず，各種行基本変形を示す行列の具体的な行列式を与える．1 つの行に対して c をかける行列 P は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられ，これは行列式の定義から

$$\det P = c.$$

1 つの行に対して c をかけたものを他の行に対して加算する行列 Q は

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & c & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられ，これは行列式の定義から

$$\det Q = 1.$$

2 つの行を入れ替える行列 R は

$$R = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられ，これは行列式の定義から

$$\det R = -1.$$

A が正則ならば A は行基本変形を示す行列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ により

$$A = A_1 A_2 \cdots A_m$$

とあらわされ，2) と 3) と 4) から

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_m$$

となるため，$\det(AB) = \det A \det B$ となる．これより，A が正則 $\Rightarrow$ $\det A \neq 0$ が得られる．また，A が非正則なら行基本変形を示す行列 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ により対角行列 D を用いて

$$P_1 P_2 \cdots P_k A = \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

とすることができ，行列式の定義から

$$\det A = 0.$$

これの対偶をとることで A が正則 $\Leftarrow$ $\det A \neq 0$ が得られ，7) が示される．これより，A もしくは B が非正則ならば

$$\det A = 0, \quad \det B = 0$$

のいずれかを満たし，AB は非正則となるため，$\det(AB) = 0$ となり，$\det(AB) = \det A \det B$ となる．
よって，命題は証明された．

□

これより，以下の系が得られる．

系 1.1-1　正則行列 A について

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Proof.
行列式の定義から $\det I = 1$ であるため，定理 1.1 の 6) から

$$\det A^{-1} \det A = \det(A^{-1}A) = 1 \ \Rightarrow\ \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

よって，命題は証明された．

□

実際に高次の行列に対する行列式を求めるときは，定理 1.1 を用いて三角行列に変形して，以下の補題を用いることが一般に多い．

補題 1.1　正方行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

と与えられるとき，行列式は

$$\det A = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Proof.
$\det A$ は

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

と与えられるが，$\sigma(1) = 1$ でないとき $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = 0$ であり，これによる添え字の入れ替えをも生じないため

$$\det A = a_{1,1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=2}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

よって，命題は証明された．

□

補題 1.2　三角行列の行列式は対角成分の積である．

Proof.

補題 1.1 を繰り返す適用することで明らか．

□

行列式は正規直交系における n 本のベクトルにより張られる体積を元にして与えたが，それについての確かであるとは示していない．これについてを以下に示す．

補題 1.3　直交行列 A について，$\det A = \pm 1$ が成り立つ．

Proof.

仮定より $A^{-1} = A^T$ であるため，定理 1.1 の 1) と 6) から

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det A \det A^T = (\det A)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \det A = \pm 1.$$

よって，命題は証明された．

□

定理 1.2

正規直交系における n 本のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$ により張られる体積はこれらを列ベクトルとする行列 X における $|\det X|$ に等しい．

Proof.

$k = n$ についての数学的帰納法により示す．$k = 1$ のときは明らかであるため，k で成り立つことを仮定して $k+1$ で成り立つことを示す．k における体積を V_k とすれば，V_{k+1} は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ により張られる $\mathbb{R}^{k+1}$ における超平面と $\boldsymbol{x}_{k+1}$ の距離 x_{k+1} により

$$V_{k+1} = x_{k+1} V_k$$

とあらわされる．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ により張られる $\mathbb{R}^{k+1}$ における超平面とそれに直交するベクトルによる正規直交系を選択することにより，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{1,k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ \vdots \\ x_{2,k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{x}_k = \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ x_{k,2} \\ \vdots \\ x_{k,k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$$

のような成分表示を与えることができ，補題 1.1 から

$$|\det X| = \left\| \begin{matrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{k,1} & * \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{k,2} & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{1,k} & x_{2,k} & \cdots & x_{k,k} & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{k+1} \end{matrix} \right\| = x_{k+1} \left\| \begin{matrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \cdots & x_{k,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \cdots & x_{k,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,k} & x_{2,k} & \cdots & x_{k,k} \end{matrix} \right\| = x_{k+1} V_k = V_{k+1}$$

となり，$|\det X| = V_{k+1}$ が得られる．任意の正規直交系では直交行列 P により基底変換をする，すなわち PX の行列式を考えればいいこととなり，定理 1.1 の 6) と補題 1.3 から

$$|\det(PX)| = |\det P||\det X| = |\det X|.$$

よって，命題は証明された．

□

これより，以下の系が得られる．

系 1.2-1　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$ により張られる領域 D に対して線型変換 f を作用させたとき，D から $f(D)$ への体積の変化率は，f の変換行列 A により $|\det A|$ とあらわされる．

Proof.

標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ により張られる領域 D' から D および $f(D)$ へと線型変換したときの体積の変化率を考える．$D' \to D$ では明らかに体積の変化率は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を列ベクトルとする行列を X とすれば，定理 1.2 より $|\det X|$ となる．$D' \to f(D)$ でも同様にして，$f(D)$ を張るためのベクトルを $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n \in \mathbb{R}^n$ とすることで

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 & \cdots & \boldsymbol{y}_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = AX$$

となるため，体積の変化率は $|\det(AX)|$ となる．以上より，$D \to f(D)$ のときは定理 1.1 の 6) から

$$\frac{(D' \to f(D) \text{ の変化率})}{(D' \to D \text{ の変化率})} = \frac{|\det(AX)|}{|\det X|} = \frac{|\det A||\det X|}{|\det X|} = |\det A|.$$

よって，命題は証明された．

□

1.2　余因子展開

まずは，以下の定義を与える．

定義 1.2

行列 A に対して，行に関する添え字集合 I と列に関する添え字集合 J に対応する行および列を A から除去したものを $A_{I,J}$ とあらわし，これを A の**小行列 (submatrix)** という．$I = \{i\}, J = \{j\}$ のように I と J が 1 元集合ならば $A_{i,j}$ とあらわし，$\det A_{i,j}$ を A の**余因子 (cofactor)** という．特に，$I = J$ である小行列を**主小行列**という．

正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

と与えたとき，この行列式について定理 1.1 の 4) から

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

となり，定理 1.1 の 2) と補題 1.1 を用いることで

$$\begin{aligned} \det A =& a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix} \\ =& \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1,k} \det A_{1,k} \end{aligned}$$

のように小行列式の和としてあらわすことができる．これは 1 行目による行列式の展開となるが，これを i 行目で展開するとなると定理 1.1 の 2) より

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{i,k} \det A_{i,k}.$$

また，列について展開するとすれば定理 1.1 の 1) より行列式に関する性質は行列を転置した場合でも同様に成り立つため，j 列目での展開は

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det A_{k,j}.$$

このような余因子による行列式の展開を**余因子展開 (cofactor expansion)** という．

これより，以下の定理が与えられる．

定理 1.3

正則行列 A の余因子を $D_{i,j} = \det A_{i,j}$ とする．このとき，

$$\tilde{A} = \left((-1)^{i+j} D_{i,j}\right)^T$$

と定義される行列とで

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}$$

が成り立つ．特に，$\tilde{A}$ を**余因子行列 (cofactor matrix)** という．

Proof.

1 から n 行目の余因子展開について

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1,k} \det A_{1,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+2} a_{2,k} \det A_{2,k} \\
&= \vdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+n} a_{n,k} \det A_{n,k}
\end{aligned}$$

となり，i 行目による余因子展開の余因子を j 行目による余因子展開の余因子で置き換えたとき

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{i,k} \det A_{j,k} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

となるため定理 1.1 の 5) からこの行列式は 0 であり，

$$
\begin{aligned}
I\det A =& \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^2 \det A_{1,1} & (-1)^3 \det A_{2,1} & \cdots & (-1)^{n+1} \det A_{n,1} \\ (-1)^3 \det A_{1,2} & (-1)^4 \det A_{2,2} & \cdots & (-1)^{n+2} \det A_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n} \det A_{1,n} & (-1)^{2+n} \det A_{2,n} & \cdots & (-1)^{2n} \det A_{n,n} \end{pmatrix} \\
=& A \begin{pmatrix} D_{1,1} & D_{2,1} & \cdots & D_{n,1} \\ D_{1,2} & D_{2,2} & \cdots & D_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1,n} & D_{2,n} & \cdots & D_{n,n} \end{pmatrix} \\
=& A\tilde{A}.
\end{aligned}
$$

定理 1.1 の 7) より $\det A \neq 0$ であるため

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}.$$

よって，命題は証明された．

□

定理 1.4　クラメルの公式

変数 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ と定数 $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ および係数行列 A による線型連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は，A の i 列目を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列を A_i とあらわすことで

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{pmatrix}$$

とあらわされる．これを**クラメルの公式 (Cramer's rule)** という．

Proof.

定理 1.3 から

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\tilde{A}}{\det A}\boldsymbol{b}$$

となるが，A の余因子を $D_{j,i} = \det A_{i,j}$ とあらわすとして

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

とすれば，$\boldsymbol{x}$ の第 i 成分について列についての余因子展開から

$$x_i = \frac{1}{\det A}(b_1 D_{1,1} + b_2 D_{1,2} + \cdots + b_n D_{1,n}) = \frac{\det A_i}{\det A}$$

となり，全ての成分について連立することで等式が得られる．

よって，命題は証明された．

□