テンソル -テンソル積-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 9 月 20 日

目次

第 1 章

ベクトルと行列

1.1　ベクトル

ベクトル空間とはベクトル空間の公理を満たす代数的構造をもった集合であり，その元を**ベクトル**という．ベクトル空間の要素数は一般に扱うことは難しいが，基底を用いることで一意に扱うことができる．基底とは，体 K 上のベクトル空間 V の任意の元 $v \in V$ が基底との線型結合によって一意にあらわされ，全てに要素をあらわすことができる集合のことである．これを**線型独立性**と**全域性**という．また，この基底の数を，ベクトル空間 V の**次元**という．

アインシュタインの縮約により，v は基底の集合 $\{e_1, \cdots, e_{\dim V}\}$ と K の元の係数の集合 $\{a^1, \cdots, a^{\dim V}\}$ をあらわすと以下のようにあらわされる．

$$v = a^i e_i$$

1.2　行列

行列とは体 K 上のベクトル空間 V, W で V から W への線型写像 φ として定義される．これを確認する．

V の基底の集合を $\{e_1, \cdots, e_{\dim V}\}$，対応する K の元の係数成分の集合を $\{a^1, \cdots, a^{\dim V}\}$，$W$ の基底の集合を $\{f_1, \cdots, f_{\dim W}\}$，対応する K の元の係数成分の集合を $\{b^1, \cdots, b^{\dim W}\}$ としたとき，$\varphi(e_i) = b^j f_j$ が成り立つならば以下のようになる．

$$\begin{aligned}\varphi(a^i e_i) &= a^i \varphi(e_i) \\ &= a^i b_i^j f_j\end{aligned}$$

$\dim V = m, \dim W = n$ とすれば，b_i^j は $n \times m$ 行列の成分であるといえる．また，V から W への線型写像全体の集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ もベクトル空間となる．ここで，$g_i^j \in \mathrm{Hom}(V, W)$ について，基底変換の作用素として以下のような線型写像の対応関係が成り立つとする．

$$g_j^i(e_k) = \delta_k^i f_j$$

このとき，g_j^i 全体が $\mathrm{Hom}(V, W)$ の基底となることがわかる．これにより，φ は基底と成分を用いて以下のようにあらわすことができる．

$$\varphi = b_i^j g_j^i$$

このとき φ を**行列**といい，基底の数から以下の関係式が成り立つ．

$$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W = nm$$

第 2 章

テンソル積

2.1 双線型写像

定義 1.

体 K 上のベクトル空間 V, W, U で $v \in V$ と $w \in W$ を $\phi(w, v) \in U$ に対応させる写像 $\phi : V \times W \to U$ を考えたとき，$\alpha, \beta \in K$ と $v_0, v_1, v_2 \in V$, $w_0, w_1, w_2 \in W$ に対して以下の性質を満たすとき，ϕ を**双線型写像**という．

$$\phi(\alpha v_1 + \beta v_2, w_0) = \alpha\phi(v_1, w_0) + \beta\phi(v_2, w_0)$$
$$\phi(v_0, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha\phi(v_0, w_1) + \beta\phi(v_0, w_2)$$

特に U が 1 次元空間のとき，この双線型写像を**双線型形式**という．

例　体 K 上の $m \times n$ 行列 $M(m, n)$ と $n \times l$ 行列 $M(n, l)$ の積は $M(m, n) \times M(n, l) \to M(m, l)$ となり，双線型写像となる．また，V で計量が定義されるならば，内積は $V \times V \to K$ となり，双線型写像となる．

体 K 上のベクトル空間 V, W, U で，$V \times W$ から U への双線型写像全体の集合を $\mathcal{L}(V, W; U)$ としたとする．$\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{L}(V, W; U)$，$\alpha, \beta \in K$ と $v \in V, w \in W$ に対して以下のような関係式が成り立つことがわかる．

$$(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2)(v, w) = \alpha\phi_1(v, w) + \beta\phi_2(v, w)$$

このように定義することによって，$\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \in \mathcal{L}(V, W; U)$ であり，$\mathcal{L}(V, W; U)$ は K 上のベクトル空間となる．また，V の基底の集合を $\{e_1, \cdots, e_{\dim V}\}$，$W$ の基底の集合を $\{f_1, \cdots, f_{\dim W}\}$ とするとき，$\phi \in \mathcal{L}(V, W; U)$ は $\dim V \cdot \dim W$ 個の $\phi(e_i, f_j) \in U$ によって一意に決定される．これは $v = \alpha^i e_i, w = \beta^j f_j$ のとき $\phi(v, w) = \alpha^i\beta^j\phi(e_i, f_j)$ が成り立つということを意味しており，これが一意に決定されるということである．

U の基底の集合を $\{g_1, \cdots, g_{\dim U}\}$ とするならば，双線型写像による基底変換 $\phi_{abc} \in \mathcal{L}(V, W; U)$ を以下のように定義する．

$$\phi_{abc}(e_i, f_j) = \begin{cases} g_c & (i = a, j = b) \\ 0 & (other) \end{cases}$$

これにより，ϕ_{abc} 全体は $\mathcal{L}(V, W; U)$ の基底となり，基底の数から以下の式が成立する．

$$\dim \mathcal{L}(V, W; U) = \dim V \cdot \dim W \cdot \dim U$$

また，V もしくは W の元を固定することにより，それぞれにおいて以下の式が成り立つ．

$$\mathcal{L}(V, W; U) \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(W, U))$$
$$\mathcal{L}(V, W; U) \cong \mathrm{Hom}(W, \mathrm{Hom}(V, U))$$

双線型写像の普遍性

体 K 上のベクトル空間 V, W, U で $V \times W$ から U への双線型写像全体の集合 $\mathcal{L}(V, W; U)$ には $V \times W$ から K に対応させるベクトル空間 U_0 と双線型写像 $\iota : V \times W \to U_0$ が存在する．この写像は 2 変数の場合での**線型汎関数**であるという．

また，任意の $\phi \in \mathcal{L}(V, W; U)$ に対して，$\phi = F \circ \iota$ となる線型写像 $F : U_0 \to U$ は同型を除き一意に存在し，それは以下のようにあらわされる．

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\phi"'] & U_0 \arrow[d, "F"] \\ & U \end{tikzcd}$$

このとき，U_0 は U によらないベクトル空間であり，この定理は U が U_0 からの線型写像により決定されることを示している．このような普遍な U_0 に対する性質を双線型写像の**普遍性**という．

また，これらの性質を満たす別の組 (U_0', ι') が存在するとき，線型同型写像 $F_0 : U_0 \to U_0'$ で $F_0 \circ \iota = \iota'$ となるものが同型を除き一意に存在する．

U_0 と ι を組 (U_0, ι) とあらわしたとき，(U_0, ι) のことを $V \times W$ から U への**普遍射**という．

Proof.

V の基底の集合を $\{e_1, \cdots, e_{\dim V}\}$，$W$ の基底の集合を $\{f_1, \cdots, f_{\dim W}\}$ とし，$\dim U_0 = \dim V \cdot \dim W$ であることから，U_0 の基底全体を $\dim W$ 行 $\dim V$ 列に並べて 2 重の添え字で g_{ij} とすることで基底の元の対 (e_i, f_j) と g_{ij} の間に 1 対 1 の対応を作る．$\alpha, \beta \in K$ を用いて $v \in V$ で $v = \alpha^i e_i$，$w \in W$ で $\beta^j f_j$ に対して ι は以下のように作用すると定義する．

$$\iota(v, w) = \alpha^i \beta^j \iota(e_i, f_j) = \alpha^i \beta^j g_{ij}$$

このとき，ι は仮定より双線型写像であることが明らかであり，U_0 は ι によって生成されることがわかる．ϕ は $\gamma \in K$ と $u \in U_0$ で $u = \gamma^{ij} g_{ij}$ に対して以下のように線型写像 F を与えるとする．

$$F(u) = \gamma^{ij} \phi(e_i, f_j)$$

このとき，合成写像は以下のようになる．

$$(F \circ \iota)(v, w) = \alpha^i \beta^j \phi(e_i, f_j) = \phi(\alpha^i e_i, \beta^j f_j) = \phi(v, w)$$

これより，F が U_0 から U への線型写像であることがわかる．また，$\iota(e_i, f_j) = g_{ij}$ より ι の一意性が得られる．よって，$\phi = F \circ \iota$ となる写像 F が同型を除き一意に存在することが示された．

次に一意性について示す．

このとき、$U_0 \cong U_0'$ であることを示すことで証明が完了する．つまり，写像 $F_0 : U_0 \to U_0'$ となる線型同型写像 F_0 が存在することを示せばいい．

$$\begin{tikzcd} & U_0' \arrow[d, shift left, "G_0"] \\ V \times W \arrow[ur, "\iota'"] \arrow[r, "\iota"] & U_0 \arrow[u, shift left, "F_0"] \end{tikzcd}$$

普遍射の存在より，$\iota' = F_0 \circ \iota$ となる F_0 が存在する．同様にして，線型写像 G_0 に対して $\iota = G_0 \circ \iota'$ となる G_0 が存在する．よって，$\iota = G_0 \circ F_0 \circ \iota$ および $\iota' = F_0 \circ G_0 \circ \iota'$ が成り立つ．

U_0 の恒等写像 id_{U_0} で $\mathrm{id}_{U_0} \circ \iota = \iota$ となるため，$G_0 \circ F_0 = \mathrm{id}_{U_0}$ である．同様にして U_0' の恒等写像 $\mathrm{id}_{U_0'}$ で $F_0 \circ G_0 = \mathrm{id}_{U_0'}$ となり，F_0 は同型写像である．F_0 が同型写像であることから，F は同型を除き一意に存在する．

よって，命題は証明された．

□

2.2 二項間のテンソル積

定義 2.

体 K 上のベクトル空間 V, W に対する普遍射の組 (U_0, ι) を V, W の**テンソル積**といい，$v \in V, w \in W$ に対して，$V \otimes W = U_0$ および $\iota(v, w) = v \otimes w$ とあらわされる．また，ι をテンソル積の**標準写像**という．

V, W の双対空間をそれぞれ V^*, W^* とすれば，$v \in V, w \in W$ と $(\varphi, \psi) \in V \times W$ に対して，$\varphi(v)\psi(w) \in K$ を対応させる写像は明らかに V^*, W^* から K に対応させる双線型写像であるから，以下の式が成り立つ．

$$U_0 = \mathcal{L}(V^*, W^*; K)$$

このように，$(v, w) \in V \times W$ で $\iota(v, w) \in U_0$ であり，普遍射について確かめられる．また，V, W の双対基底の集合をそれぞれ $\{e^1, \cdots, e^{\dim V}\}, \{f^1, \cdots, f^{\dim W}\}$ とすることで，$\mathcal{L}(V^*, W^*; K)$ の基底 ϕ_{ij} は以下のようになる．

$$\phi_{ab}(e^i, f^j) = \begin{cases} 1 & (i = a, j = b) \\ 0 & (other) \end{cases}$$

この基底は $\phi_{ij} = \iota(e_i, f_j)$ となる．また，任意の $\phi \in \mathcal{L}(V, W; U), \gamma^{ij} \in K$ に対して以下の式が成り立つとする．

$$F_\phi(\gamma^{ij}\phi_{ij}) = \gamma^{ij}\phi(e_i, f_j)$$

これにより，線型写像 $F_\phi : U_0 \to U$ を定義すれば，$\phi = F_\phi \circ \iota$ が成り立つ．つまり，テンソル積 $V \otimes W$ は $\mathcal{L}(V^*, W^*; K)$，$v \otimes w$ は双線型写像 $\iota(v, w)$ とみなすことができる．

テンソル積の分配則

体 K 上のベクトル空間 V, W で，$\alpha, \beta \in K$ と $v_0, v_1, v_2 \in V$，$w_0, w_1, w_2 \in W$ に対して以下を満たす．これを**テンソル積の分配則**という．

$$(\alpha v_1 + \beta v_2) \otimes w_0 = \alpha(v_1 \otimes w_0) + \beta(v_2 \otimes w_0)$$
$$v_0 \otimes (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha(v_0 \otimes w_1) + \beta(v_0 \otimes w_2)$$

Proof.

双線型写像の線型性より明らか．

□

$V \otimes W$ の基底は $\dim V \cdot \dim W$ 個の元 $e_i \otimes f_j$ になり，以下の式が成り立つ．

$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$$

上式より，$e_i \otimes f_j$ は基底を構成するため，$e_i \otimes f_j \neq 0$ である．$V \otimes W$ は $\iota(V \times W)$ で生成されるため，任意の元は $\Sigma(v_i \otimes w_i)$ であらわされるが，これでは複数の方法でこのような和の形の表示を持ち，任意の元を選ぶのは難しい．また，一般に $V \otimes W \neq \iota(V \times W)$ であるから，全ての元を $v \otimes w$ であらわすことはできない．そこで，一般には任意の元の生成法の一例として基底を用いた構成が用いられる．つまり，$V \otimes W$ の任意の元は $\alpha^{ij} \in K$ を用いて以下のようにあらわされる．

$$\alpha^{ij}(e_i \otimes f_j) = (\alpha^{ij} e_i) \otimes f_j = e_i \otimes (\alpha^{ij} f_j)$$

テンソル積の性質より，$\phi \in \mathcal{L}(V, W; U)$ に対して $\phi = F \circ \iota$ となる $F \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, U)$ が一意的に対応する．このとき以下の補題が与えられる．

補題 1.　体 K 上のベクトル空間 V, W, U について以下の関係式が成り立つ．

$$\mathcal{L}(V, W; U) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes W, U)$$

Proof.

$\phi_F = F \circ \iota$ とおくと，$\phi_F \in \mathcal{L}(V, W; U)$ であり，F に ϕ_F を対応させる写像は同型写像である．これが線型であることは，$F, F' \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, U), \alpha \in K$ で以下が成立することであるが，これは定義より明らかである．

$$\phi_{\alpha F} = \alpha \phi_F$$
$$\phi_{F+F'} = \phi_F + \phi_{F'}$$

普遍性より，$\phi_F = F \circ \iota$ を満たす F は一意に存在し，線型同型写像によって関係づけることができることから命題が証明される．

□

これより直ちに以下の系が導かれる．

系 1.　体 K 上のベクトル空間 V, W について以下の関係が成り立つ．

$$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$

Proof.

$$(V \otimes W)^* = \mathrm{Hom}(V \otimes W, K) \cong \mathcal{L}(V, W; K) \cong V^* \otimes W^*$$

□

テンソル積の交換則

体 K 上のベクトル空間 V, W の元のテンソル積は一般に交換則は成り立たないが，$v \in V, w \in W$ でテンソル積の対応 $v \otimes w \leftrightarrow w \otimes v$ より以下の関係が成り立つ．

$$V \otimes W \cong W \otimes V$$

これをテンソル積の**交換則**という。

Proof.

$V \times W$ から $W \otimes V$ への双線型写像 $(v, w) \mapsto w \otimes v$ に対応して，$\dim V \otimes W = \dim W \otimes V$ より以下のような線型写像 F が存在する．

$$F : V \otimes W \to W \otimes V$$
$$F(v \otimes w) = w \otimes v$$

同様にして以下のような線型写像 G が存在する．

$$G : W \otimes V \to V \otimes W$$
$$F(w \otimes v) = v \otimes w$$

$F \circ G = \mathrm{id}, G \circ F = \mathrm{id}$ より，F は同型写像である．よって命題が証明された．

□

2.3 多重線型写像によるテンソル積

定義 3.

体 K 上のベクトル空間 $V_1, V_2, \cdots, V_n, U$ と写像 ϕ で以下のようにあらわされるとする．

$$\phi : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U$$

この写像のそれぞれの変数について線型写像であるとき，これを**多重線型写像**もしくは n **重線型写像**という．つまり，$i \in \mathbb{N}(1 \leq i \leq n)$ で $\alpha, \beta \in K, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, \cdots, v_n \in V_n, v_i, v_i' \in V_i$ に対して以下の式が成立することである．

$$\phi(v_1, v_2, \cdots, \alpha v_i + \beta v_i', \cdots, v_n) = \alpha\phi(v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_n) + \beta\phi(v_1, v_2, \cdots, v_i', \cdots, v_n)$$

特に，$U = K$ であるとき，**多重線型形式**もしくは n **重線型形式**という．

双線型写像と同様に $V_1, V_2, \cdots, V_n$ から U への写像の全体集合を $\mathcal{L}(V_1, V_2, \cdots, V_n; U)$ とする．このとき，双線型写像と同様にして，普遍射 (U_0, ι) が存在して，$\iota \in \mathcal{L}(V_1, V_2, \cdots, V_n; U)$ で $\iota : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to U_0$ となり，$\phi = F \circ \iota$ を満たす F が存在する．

この (U_0, ι) を，$V_1, V_2, \cdots, V_n$ のテンソル積といい，$v_i \in V_i$ で以下のようにあらわされる．

$$U_0 = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$$
$$\iota(v_1, v_2, \cdots, v_n) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$$

テンソル積の結合則

体 K 上のベクトル空間 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ でそれぞれの元を $v_i \in V_i$ とする．$n = 3$ としたときのテンソル積の対応 $((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \leftrightarrow v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3))$ によって，以下の関係式が成り立つ．

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

これを**テンソル積の結合則**という．これは一般の $n \in \mathbb{N}$ でも成り立つ．

Proof.

線形写像

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times V_2 \times V_3 & \xrightarrow{\phi_1} & (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \\ \cup & & \cup \\ (v_1, v_2, v_3) & \longmapsto & (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \end{array}$$

を与えれば、テンソル積の普遍性より、以下のような線型写像が同型を除き一意に存在する。

$$\begin{array}{ccc} V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 & \xrightarrow{F} & (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \\ \cup & & \cup \\ v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 & \longmapsto & (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \end{array}$$

同様にして，$v \in V_3$ を定めるような線形写像

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times V_2 & \xrightarrow{\phi_v} & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \\ \cup & & \cup \\ (v_1, v_2) & \longmapsto & v_1 \otimes v_2 \otimes v \end{array}$$

を与えればのテンソル積の普遍性より，以下のような線型写像が同型を除き一意に存在する。

$$\begin{array}{ccc} V_1 \otimes V_2 & \xrightarrow{G_v} & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ v_1 \otimes v_2 & \longmapsto & v_1 \otimes v_2 \otimes v \end{array}$$

よって，線型性より $v' \in V_3, \alpha \in K$ に対して

$$\begin{aligned} G_{v+v'} &= G_v + G_{v'} \\ G_{\alpha v} &= \alpha G_v \end{aligned}$$

といった関係式が成り立つ．

また、G_v および $x \in V_1 \otimes V_2$ を用いることで線形写像

$$\begin{array}{ccc} (V_1 \otimes V_2) \times V_3 & \xrightarrow{G_v} & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x, v) & \longmapsto & G_v(x) \end{array}$$

を与えればテンソル積の普遍性より、以下のような線形写像が同型を除き一意に存在する。

$$\begin{array}{ccc} (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \xrightarrow{G_v} & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 & \longmapsto & G_{v_3}(v_1 \otimes v_2) \end{array}$$

また、$G_{v_3}(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ であることから $F \circ G$ は $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ の恒等写像である。つまり、G は F の逆写像であり、F と G はそれぞれ線形同型写像である。

これらをまとめた可換図式を以下に示す．なお，$\iota_1, \iota_2, \iota_3$ はそれぞれの標準写像を示す．

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \times V_3 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "\psi"] & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \arrow[d, shift left, "F"] & V_1 \otimes V_2 \arrow[l, "G_v"'] \\ (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[ur, "\phi_1"'] & (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \arrow[u, shift left, "G"] & V_1 \times V_2 \arrow[u, "\iota_3"'] \arrow[ul, "\phi_v"] \end{tikzcd}$$

同様にして $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ と $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ の間に線型同型写像が存在することを示すことで

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

となり，$n = 3$ としたときの命題が示される．また，一般の $n \in \mathbb{N}$ としたときの結合則は帰納的に明らかである．

よって、命題は証明された。

□

一般にテンソル積は双線型写像によるテンソル積と同様に以下の関係式を満たす．

$$\begin{aligned} &v_1 \otimes \cdots \otimes (\alpha v_i + \beta v_i') \otimes \cdots \otimes v_n = \alpha(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_n) + \beta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i' \otimes \cdots \otimes v_n) \\ &\dim (V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = \dim V_1 \cdots \dim V_n \\ &V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \cong \mathcal{L}(V_1^*, \cdots, V_n^*; K) \end{aligned}$$

線型写像のテンソル積

体 K 上のベクトル空間 V_1, V_2, W_1, W_2 に対して，線型写像 $F_1 : V_1 \to W_1, F_2 : V_2 \to W_2$ が対応するとする．テンソル積 $V_1 \otimes V_2$ から $W_1 \otimes W_2$ への線型写像を考えるとき，任意の元 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ に対して，$\tilde{F}(v_1 \otimes v_2) = F_1(v_1) \otimes F_2(v_2)$ となる線型写像 $\tilde{F} : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ がただ 1 つ存在する．このとき，$\tilde{F}$ を F_1, F_2 の**テンソル積**といい，$\tilde{F} = F_1 \otimes F_2$ とあらわす．

Proof.

$V_1 \otimes V_2$ と $W_1 \otimes W_2$ の標準写像を ι, κ とし，F_1, F_2 を以下のような写像であるとする．

$$
\begin{aligned}
&F_1 \times F_2 : V_1 \times V_2 \to W_1 \times W_2 \\
&(F_1 \times F_2)(v_1, v_2) = (F_1(v_1), F_2(v_2))
\end{aligned}
$$

これの可換図式は以下のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "F_1 \times F_2"'] & V_1 \otimes V_2 \arrow[d, "\tilde{F}"] \\
W_1 \times W_2 \arrow[r, "\kappa"] & W_1 \otimes W_2
\end{tikzcd}
$$

また，合成写像 $\kappa \circ (F_1 \times F_2)$ は $W_1 \times W_2$ から $W_1 \otimes W_2$ への双線型写像である．よって，テンソル積の性質より，$\tilde{F} : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ で $\kappa \circ (F_1 \times F_2) = \tilde{F} \circ \iota$ となるものがただ 1 つ存在する．

□

線型写像のテンソル積の性質

体 K 上のベクトル空間 $V_i, W_i, U_i (i = 1, 2)$ で，$\alpha \in K, F_1, G_1 \in \mathrm{Hom}(V_1, W_1), F_2, G_2 \in \mathrm{Hom}(V_2, W_2), H_j \in \mathrm{Hom}(W_j, U_j)$ としたとき，以下の関係式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&F_1 \otimes (F_2 + G_2) = F_1 \otimes F_2 + F_1 \otimes G_2 \\
&(F_1 + G_1) \otimes F_2 = F_1 \otimes F_2 + G_1 \otimes F_2 \\
&(\alpha F_1) \otimes F_2 = F_1 \otimes (\alpha F_2) = \alpha(F_1 \otimes F_2) \\
&(H_1 \circ F_1) \otimes (H_2 \circ F_2) = (H_1 \otimes H_2) \circ (F_1 \otimes F_2)
\end{aligned}
$$

この性質は n 個の線型写像についても，同様に成り立つ．

Proof.

テンソル積の線型性より明らか．

□

テンソル積と双対空間

体 K 上のベクトル空間 V, W について，$v \in V, \varphi \in V^*, w \in W$ で $(\varphi, w) \in V^* \times W$ に対して，以下の式によって $F_{\varphi,w} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ を定義することができる．

$$F_{\varphi,w}(v) = \varphi(v)w$$

また，$\varphi \otimes w \leftrightarrow F_{\varphi,w}$ により，以下の関係式が成り立つ．

$$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W)$$

Proof.

(φ, w) に $F_{\varphi,w}$ を対応させる写像を ϕ としたとき，これは明らかに双線型写像である．つまり，$V^* \otimes W$ への標準写像を ι としたとき，$V^* \otimes W$ から $\mathrm{Hom}(V, W)$ への線型写像 $\tilde{F}$ で $\tilde{F} \circ \iota = \phi$ となるものが存在する．このとき，$\tilde{F}$ が同型写像であることを示せばいい．

$$
\begin{tikzcd}
V^* \times W \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\phi"'] & V^* \otimes W \arrow[d, "\tilde{F}"] \\
& \mathrm{Hom}(V, W)
\end{tikzcd}
$$

まずは単射であることを示す．$\tilde{F}$ は線型写像であることから，$t \in V^* \otimes W$ に対して，$\tilde{F}(t) = 0$ となるのは $t = 0$ のときのみであることを示せばいい．また，$\varphi_i \in V^*, w_i \in W$ に対して，$t = \Sigma \varphi_i \otimes w_i$ とあらわす．

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(t) &= \tilde{F}\left(\sum_i (\varphi_i \otimes w_i)\right) \\
&= \tilde{F}\left(\sum_i \iota(\varphi_i, w_i)\right) \\
&= \sum_i \tilde{F} \circ \iota(\varphi_i, w_i) \\
&= \sum_i \phi(\varphi_i, w_i) \\
&= \sum_i F_{\varphi_i, w_i}
\end{aligned}
$$

これより，$\tilde{F}(t)(v) = \sum_i F_{\varphi_i, w_i}(v) = \sum_i \varphi_i(v) w_i = 0$ という関係式が得られ，w_i の線型独立性より，$\varphi_i(v) = 0$ で，$\varphi_i = 0$ のとき $t = 0$ ということが示される．

次に全射であることを示す．V の基底の集合を $\{e_1, \cdots, e_{\dim V}\}$，その双対基底の集合を $\{e^1, \cdots, e^{\dim V}\}$，W の基底の集合を $\{f_1, \cdots, f_{\dim W}\}$ とする．

$$F_{e^i, f_j}(e_k) = e^i(e_k) f_j = \delta^i_k f_j$$

よって，F_{e^i, f_j} は $\mathrm{Hom}(V, W)$ の基底となる．また，$F_{e^i, f_j} = \phi(e^i, f_j) = \tilde{F}(e^i \otimes f_j)$ であるから，線型性より，全射であることがわかる．

よって，命題が証明された．

$\square$