テンソル -テンソル-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 10 月 12 日

目次

第 1 章

テンソルの構成

1.1 テンソルの定義

定義 1.

体 K 上のベクトル空間 V とその双対空間 V^* が与えられたとき，それらのテンソル積によって得られるベクトル空間 T を**テンソル空間**といい，その元を**テンソル**という．

ベクトル空間によるテンソル積の交換則と結合則より，p 個の V と q 個の V^* によるテンソル空間はテンソル積の順序に関わらず，それぞれ同型であることからそれら全てを同一視することができる．このとき，V と V^* によって生成されるテンソル空間 T を (p,q) **型テンソル空間**といい，以下のようにあらわす．

$$T^p{}_q(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p\text{ 個}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q\text{ 個}}$$

なお，$T^0{}_0(V) = K$ と定義し，$T^p{}_0(V) = T^p(V)$ および $T^0{}_q(V) = T_q(V)$ とあらわすこともある．また，$T^p{}_q(V)$ の元を (p,q) **型テンソル**もしくは p **階反変** q **階共変テンソル**，**混合テンソル**という．特に，$T^p(V)$ の元を**反変テンソル**，$T_q(V)$ の元を**共変テンソル**という．

体 K 上のベクトル空間 V によるテンソル空間 $T^p{}_q(V)$ を与える．定義より $T^0{}_0(V)$ の元は明らかに K の元であることから，$T^0{}_0(V)$ の元をスカラーと同一視できる．同様にして，$T^1(V)$ の元を反変ベクトル，$T_1(V)$ の元を共変ベクトルと同一視される．また，ベクトル空間とその双対空間について

$$\mathrm{Hom}(V,V) \cong V \otimes V^* = T^1{}_1(V)$$

という同型対応が成り立つことから $T^1{}_1(V)$ の元は線型変換を示す行列と同一視できることがわかる．

多重線型形式により $\mathcal{L}(V,\cdots,V;K) \cong V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ であることから以下の関係式がただちに成り立つ．

$$\mathcal{L}(V,\cdots,V;K) \cong \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q\text{ 個}} = T_q(V)$$

これにより，$\varphi^i \in V^*$ と $v_j \in V$ を与えれば，$t_1 = \varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^q \in T_q(V)$ は

$$t_1(v_1,\cdots,v_q) = \varphi^1(v_1)\cdots\varphi^q(v_q) \in K$$

という対応をすることで $\mathcal{L}(V,\cdots,V;K)$ の元となる．

同様にして，$\psi_i \in V$ と $w^j \in V^*$ 与えれば，$t_2 = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_p \in T^p(V)$ は

$$t_2(w^1,\cdots,w^p) = w^1(\psi_1)\cdots w^p(\psi_p) \in K$$

という対応をすることで $\mathcal{L}(V^*,\cdots,V^*;K)$ の元となる．

以上より，$t_3 = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_p \otimes \varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^q \in T^p{}_q(V)$ は

$$t_3(w^1,\cdots,w^p,v_1,\cdots,v_q) = w^1(\psi_1)\cdots w^p(\psi_p)\varphi^1(v_1)\cdots\varphi^q(v_q) \in K$$

という対応をすることで $\mathcal{L}(V^*,\cdots,V^*,V,\cdots,V;K)$ の元となる．

よって，テンソルは普遍性による同型対応により，$(p+q)$ 重線型形式の元として定義することができる．また，テンソル空間の双対空間は

$$(T^p{}_q(V))^* = \underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{p\text{ 個}}\otimes\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{q\text{ 個}} = T^q{}_p(V)$$

となり，添え字の上下を入れ替えることで得られる．

1.2　テンソルの演算

定義 2.

体 K 上のベクトル空間 V によるテンソル空間 $T^p{}_q(V)$ を与えたとする．$\dim V = n$ とすれば $\dim T^p{}_q(V) = n^{p+q}$ であり，n^{p+q} 個の基底によって $T^p{}_q(V)$ は構成されることがわかる．

このとき，V の基底の集合が $\{e_1,\cdots,e_n\}$，V^* の基底の集合が $\{f^1,\cdots,f^n\}$ であるとき，

$$\left\{t_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_q} = e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}\in T^p{}_q(V)\,\middle|\,\forall i_\alpha, j_\beta\in\mathbb{N}\ s.t.\ 1\le i_\alpha, j_\beta\le n\right\}$$

は $T^p{}_q(V)$ の自明な基底を構成する．これを $T^p{}_q(V)$ の**標準基底**という．これにより任意の $A\in T^p{}_q(V)$ は $a\in K$ を用いることで

$$A = a_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p}t_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_q}$$

とあらわされる．なお，これはアインシュタインの縮約を用いている．これを A の**成分表示**といい，$a_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p}$ を A の**成分**という．また，成分の添え字は基底の添え字の順序に対応するが，順序が自明であるときは無視される．

テンソルの加法

体 K 上のテンソル空間は加法に関するアーベル群であり，K 上の加群である．また，同じ基底をもつテンソルについての加法は成分の和としてあらわされる．

Proof.

ベクトル空間の公理より自明である．

□

テンソルの変換則

体 K 上のベクトル空間 V によるテンソル空間 $T^p{}_q(V)$ を与え，$\dim V = n$ として V の基底の集合 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，V^* の基底の集合を $\{f^1,\cdots,f^n\}$ とすれば $A\in T^p{}_q(V)$ を $a\in K$ を用いることで

$$A = a_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$$

となるとする．このとき，V と V^* のそれぞれの別の基底 $\{e'_1,\cdots,e'_n\},\{f'^1,\cdots,f'^n\}$ で変換行列によって $e'_j = \alpha^i{}_j e_i$ および $e_j = \beta^i{}_j e'_i$ とあらわされるとすれば，この基底変換により成分 $a'\in K$ は

$$a'_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p} = \alpha^{l_1}{}_{j_1}\cdots\alpha^{l_q}{}_{j_q}\beta^{i_1}{}_{k_1}\cdots\beta^{i_p}{}_{k_p}a_{l_1\cdots l_q}{}^{k_1\cdots k_p}$$

となり，このようなテンソルにおける基底変換をテンソルの**変換則**という．また，$x'^i = \beta^i{}_j x^j$ という成分の関係式が与えられたならば

$$a'_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p} = \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'_{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_q}}{\partial x'_{j_q}}\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x_{k_1}}\cdots\frac{\partial x'^{i_p}}{\partial x_{k_p}}a_{l_1\cdots l_q}{}^{k_1\cdots k_p}$$

とあらわすことができる．

Proof.

まず，f^i に関する基底変換は以下のようにして求めることができる．なお，δ はクロネッカーのデルタである．

$$f^i(e'_j) = f^i(\alpha^k{}_j e_k) = \alpha^k{}_j f^i(e_k) = \alpha^k{}_j \delta^i_k = \alpha^i{}_j \;\Rightarrow\; f^i = \alpha^i{}_j f'^j$$

e_i と f^j の基底変換に関する関係式を A に代入する．

$$\begin{aligned}
A =& a_{l_1\cdots l_q}{}^{k_1\cdots k_p} e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_p} \otimes f^{l_1} \otimes \cdots \otimes f^{l_q} \\
=& a_{l_1\cdots l_q}{}^{k_1\cdots k_p} (\beta^{i_1}{}_{k_1} e'_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (\beta^{i_p}{}_{k_p} e'_{i_p}) \otimes (\alpha^{l_1}{}_{j_1} f'^{j_1}) \otimes \cdots \otimes (\alpha^{l_q}{}_{j_q} f'^{j_q}) \\
=& \alpha^{l_1}{}_{j_1} \cdots \alpha^{l_q}{}_{j_q} \beta^{i_1}{}_{k_1} \cdots \beta^{i_p}{}_{k_p} a_{l_1\cdots l_q}{}^{k_1\cdots k_p} e'_{i_1} \otimes \cdots \otimes e'_{i_p} \otimes f'^{j_1} \otimes \cdots \otimes f'^{j_q} \\
=& a'_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p} e'_{i_1} \otimes \cdots \otimes e'_{i_p} \otimes f'^{j_1} \otimes \cdots \otimes f'^{j_q}
\end{aligned}$$

この係数比較をすることで

$$a'_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p} = \alpha^{l_1}{}_{j_1} \cdots \alpha^{l_q}{}_{j_q} \beta^{i_1}{}_{k_1} \cdots \beta^{i_p}{}_{k_p} a_{l_1\cdots l_q}{}^{k_1\cdots k_p}$$

となり，$x'^i = \beta^i{}_j x^j$ より $x^i = \alpha^i{}_j x'^j$ であることから変換行列は

$$\begin{aligned}
\alpha^i{}_j =& \frac{\partial x^i}{\partial x'_j} \\
\beta^i{}_j =& \frac{\partial x'^i}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

となる．　よって，命題は証明された．

□

定義 3.

体 K 上のベクトル空間 V によるテンソル空間 $T^p{}_q(V), T^r{}_s(V)$ を与えたとき，自然にテンソル空間同士のテンソル積 $T^p{}_q(V) \otimes T^r{}_s(V)$ が定義される．写像 $\iota : T^p{}_q(V) \times T^r{}_s(V) \to T^p{}_q(V) \otimes T^r{}_s(V)$ は一意に定まることから $(x, y) \in T^p{}_q(V) \times T^r{}_s(V)$ で $\iota(x, y)$ も一意に定まる．このとき，$\iota(x, y)$ を x と y の**積**もしくは**テンソル積**といい，$x \cdot y$ もしくは $x \otimes y$ とあらわす．

テンソル積の縮約

体 K 上のベクトル空間 V によるテンソル空間 $T^p{}_q(V), T^r{}_s(V)$ を与えたとする．$r, s \in \mathbb{N}$ で $1 \leq r \leq p$ および $1 \leq s \leq q$ を満たすとすれば，$v_i \in V$ および $\varphi_j \in V^*$ に対して以下の対応をする線型写像 $C^r{}_s : T^p{}_q(V) \to T^{p-1}{}_{q-1}(V)$ が一意に存在する．なお，$\bar{v}_r, \bar{\varphi}^s$ はその因子を含まないことを意味するとする．

$$C^r{}_s(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi^1 \otimes \cdots \otimes \varphi^q) = \varphi^s(v_r) v_1 \otimes \cdots \otimes \bar{v}_r \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi^1 \otimes \cdots \otimes \bar{\varphi}^s \otimes \cdots \otimes \otimes \varphi^q$$

これを r と s に関するテンソルの**縮約**といい，成分が $a_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p}$ のようにあらわされるとき基底を省略すれば以下の対応をとる．

$$C^r{}_s : a_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p} \mapsto a_{j_1\cdots j_{s-1}\rho\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_{r-1}\rho\cdots i_p}$$

Proof.

テンソル積の普遍性より以下の線型写像を考えることで $C^r{}_s$ が同型を除き一意に存在することは自明である．

$$\begin{array}{ccc}
V \times \cdots \times V \times V^* \times \cdots \times V^* & \longrightarrow & T^{p-1}{}_{q-1}(V) \\
\cup & & \cup \\
(v_1, \cdots, v_p, \varphi^1, \cdots, \varphi^q) & \longmapsto & \varphi^s(v_r) v_1 \otimes \cdots \otimes \bar{v}_r \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi^1 \otimes \cdots \otimes \bar{\varphi}^s \otimes \cdots \otimes \otimes \varphi^q
\end{array}$$

次に $A \in T^p{}_q(V)$ で基底 $t_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_q} \in T^p{}_q(V)$ により成分 $a \in K$ を用いて $A = a_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p} t_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_q}$ とあらわされるとき，$C^r{}_s$ によって A はクロネッカーのデルタを用いることで，

$$
\begin{aligned}
C^r{}_s(A) =& a_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p} t_{i_1\cdots \bar{i}_r \cdots i_p}{}^{j_1\cdots \bar{j}_s \cdots j_q} \delta^{j_s}_{i_r} \\
=& \sum_\rho a_{j_1\cdots j_{s-1}\rho\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_{r-1}\rho\cdots i_p} t_{i_1\cdots \bar{i}_r \cdots i_p}{}^{j_1\cdots \bar{j}_s \cdots j_q} \\
=& a_{j_1\cdots j_{s-1}\rho\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_{r-1}\rho\cdots i_p} t_{i_1\cdots \bar{i}_r \cdots i_p}{}^{j_1\cdots \bar{j}_s \cdots j_q}
\end{aligned}
$$

となる．第 3 行で明示的にシグマを用いているがアインシュタインの縮約記法に則れば省略できることを第 4 行で示している．

よって，命題は証明された．

□

テンソルの縮約は体 K 上のベクトル空間 V とその双対空間 V^* の自然な内積によって定義され，テンソルの階数が 2 減ることがわかる．つまり，これはベクトルの内積や行列の積に対応する．

テンソルの商法則

体 K 上のベクトル空間 V とその双対空間 V^* の n^{p+q} 個に対応する以下のような K の元の組 Ξ が与えられたとする．

$$
\Xi = \left\{ \xi_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p} \in K \,\middle|\, \forall i_\alpha, j_\beta \in \mathbb{N} \; s.t. \; 1 \leq i_\alpha, j_\beta \leq n \right\}
$$

$(s,t) \in \mathbb{N}^2$ で $s \leq q, t \leq p$ であるとき，(s,t) 型テンソル B に対して $(p-t, q-s)$ 型テンソル A が存在して，各基底に対して A の成分 $a \in K$ および B の成分 $b \in K$ に対して

$$
a_{j_{s+1}\cdots j_q}{}^{i_{t+1}\cdots i_p} = \xi_{k_1\cdots k_s j_{s+1}\cdots j_q}{}^{l_1\cdots l_t i_{t+1}\cdots i_p} b_{l_1\cdots l_t}{}^{k_1\cdots k_s}
$$

という関係式が与えられれば，Ξ を成分とするテンソル $X \in T^p{}_q(V)$ が存在する．このことをテンソルの**商法則**という．

Proof.

基底 $t_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_q}$ によって $X = \xi_{j_1\cdots j_q}{}^{i_1\cdots i_p} t_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_q}$ とあらわされる仮定すれば，縮約を示す線型写像 $C^i{}_j$ によって

$$
A = (C^1{}_{q+1} \circ \cdots \circ C^t{}_{q+t} \circ C^{p+1}{}_1 \circ \cdots \circ C^{p+s}{}_s)(X \otimes B)
$$

が成り立つ．B の基底を $t_{k_1\cdots k_s}{}^{l_1\cdots l_t}$ とすることにより，

$$
A = \xi_{k_1\cdots k_s j_{s+1}\cdots j_q}{}^{l_1\cdots l_t i_{t+1}\cdots i_p} b_{l_1\cdots l_t}{}^{k_1\cdots k_s} t_{i_{t+1}\cdots i_p}{}^{j_{s+1}\cdots j_q} = a_{j_{s+1}\cdots j_q}{}^{i_{t+1}\cdots i_p} t_{i_{t+1}\cdots i_p}{}^{j_{s+1}\cdots j_q}
$$

とあらわされることからテンソルの変換則を満たし，Ξ を成分とするテンソル X は存在する．

よって，命題は証明された．

□

1.3　テンソルの対称性

ここでは簡易化のために反変テンソル空間についてを扱う．

テンソルの線型組み紐写像

体 K 上のベクトル空間 V による反変テンソル空間 $T^p(V)$ が与えられ，p 個の添え字の集合 $\{1, \cdots, p\}$ の置換全体の集合 $\mathfrak{S}_p$ を定義したとする．$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ および $v_i \in V$ に対して $v_1 \otimes \cdots \times v_p \in T^p(V)$ とすれば，

$$\tau_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \in T^p(V)$$

となる線型同型写像 τ_σ が存在し，$\sigma' \in \mathfrak{S}_p$ に対して $\tau_\sigma \circ \tau_{\sigma'} = \tau_{\sigma \circ \sigma'}$ であり，1 を恒等置換とすれば $\tau_1 = \mathrm{id}_{T^p(V)}$ である．また，τ_σ を σ による $T^p(V)$ に対する**線型組み紐写像**ということとする．

Proof.

テンソル積の普遍性より，以下の線型写像を考えることで τ_σ が同型を除き一意に存在することは自明である．

$$\begin{array}{ccc} V \times \cdots \times V & \longrightarrow & T^p(V) \\ \cup & & \cup \\ (v_1, \cdots, v_p) & \longmapsto & v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \end{array}$$

同様にして合成写像は，

$$\begin{aligned} \tau_\sigma \circ \tau_{\sigma'}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) =& \tau_\sigma(v_{\sigma'(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma'(p)}) \\ =& v_{\sigma(\sigma'(1))} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(\sigma'(p))} \end{aligned}$$

となり，$\tau_1 = \mathrm{id}_{T^p(V)}$ は自明である．

よって，命題は証明された．

□

定義 4.

体 K 上のベクトル空間 V による反変テンソル空間 $T^p(V)$ を与え，p 個の添え字の集合 $\{1, \cdots, p\}$ の置換全体の集合 $\mathfrak{S}_p$ を定義したとする．

$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ による $T^p(V)$ に対する線型組み紐写像 τ_σ によって任意の $A \in T^p(V)$ で $\tau_\sigma(A) = A$ となるテンソルを**対称テンソル**，$\tau_\sigma(A) = \mathrm{sgn}\,(\sigma) A$ となるテンソルを**交代テンソル**もしくは**反対称テンソル**，**歪対称テンソル**という．対称テンソルは添え字の互換に対して不変であることを意味しており，交代テンソルは添え字の互換に対して符号を変えることを意味する．

また，$T^p(V)$ の対称テンソル全体は $\mathrm{Sym}^p(V)$，交代テンソル全体は $\mathrm{Alt}^p(V)$ とあらわされる．

体 K 上のベクトル空間 V による反変テンソル空間 $T^p(V)$ を与え，添え字の置換全体の集合 $\mathfrak{S}_p$ を与えたとき，$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ による線型組み紐写像 τ_σ により

$$\mathcal{S}_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \tau_\sigma$$

により定義される写像 $\mathcal{S}_p$ を与えたとする．$\sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p} \tau_{\sigma' \circ \sigma}$ を考えたとき，σ' は全域を動くことから $\sigma' \circ \sigma$ も全域を動くため

$$\sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p} \tau_{\sigma' \circ \sigma} = \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p} \tau_{\sigma'}$$

である．これを用いることで，

$$\begin{aligned} \tau_\sigma \circ \mathcal{S}_p =& \frac{1}{p!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p} \tau_\sigma \circ \tau_{\sigma'} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p} \tau_{\sigma \circ \sigma'} = \mathcal{S}_p \\ \mathcal{S}_p \circ \tau_\sigma =& \frac{1}{p!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p} \tau_{\sigma'} \circ \tau_\sigma = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p} \tau_{\sigma' \circ \sigma} = \mathcal{S}_p \end{aligned}$$

が成り立つ．つまり，

$$\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \tau_\sigma \circ \mathcal{S}_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathcal{S}_p = \frac{p! \mathcal{S}_p}{p!} = \mathcal{S}_p$$

である．

任意の $A \in \mathrm{Sym}^p(V)$ に対して $\mathcal{S}_p$ を作用させれば，

$$\mathcal{S}_p(A) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\tau_\sigma(A) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} A = A$$

であり，逆に $\mathcal{S}_p(A) = A$ であるならば $\tau_\sigma(A) = (\tau_\sigma \circ \mathcal{S}_p)(A) = \mathcal{S}_p(A) = A$ より $A \in \mathrm{Sym}^p(V)$ となる．つまり，

$$A \in \mathrm{Sym}^p(V) \;\Leftrightarrow\; \forall\sigma \in \mathfrak{S}_p \; s.t.\; \tau_\sigma(A) = A$$

が成り立ち，任意の $A \in \mathrm{Sym}^p(V)$ に対して $\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_p(A)) = \mathcal{S}_p(A)$ となることから $\mathcal{S}_p$ は $T^p(V)$ の $\mathrm{Sym}^p(V)$ への射影作用素となり，特にこれを**対称化作用素**という．

同様にして，

$$\mathcal{A}_p = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma)\tau_\sigma$$

を定義すれば，$\mathrm{sgn}\,(\sigma\sigma') = \mathrm{sgn}\,(\sigma)\mathrm{sgn}\,(\sigma')$ より $\mathrm{sgn}\,(\sigma') = \mathrm{sgn}\,(\sigma)\mathrm{sgn}\,(\sigma\sigma')$ となることを用いて，

$$\begin{aligned}
\tau_\sigma \circ \mathcal{A}_p =& \frac{1}{p!}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma')\tau_\sigma\circ\tau_{\sigma'} = \frac{1}{p!}\mathrm{sgn}\,(\sigma)\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma\sigma')\tau_{\sigma\circ\sigma'} = \mathrm{sgn}\,(\sigma)\mathcal{A}_p\\
\mathcal{A}_p \circ \tau_\sigma =& \frac{1}{p!}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma')\tau_{\sigma'}\circ\tau_\sigma = \frac{1}{p!}\mathrm{sgn}\,(\sigma)\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma\sigma')\tau_{\sigma'\circ\sigma} = \mathrm{sgn}\,(\sigma)\mathcal{A}_p
\end{aligned}$$

となり，

$$\mathcal{A}_p \circ \mathcal{A}_p = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma)\tau_\sigma\circ\mathcal{A}_p = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(\mathrm{sgn}\,(\sigma))^2\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_p$$

が成り立つ．

任意の $A \in \mathrm{Alt}^p(V)$ に対して $\mathcal{A}_p$ を作用させれば，

$$\mathcal{A}(A) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma)\tau_\sigma(A) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(\mathrm{sgn}\,(\sigma))^2 A = A$$

であり，逆に $\mathcal{A}_p(A) = A$ であるならば $\tau_\sigma(A) = (\tau_\sigma\circ\mathcal{A}_p)(A) = \mathcal{A}_p(A) = \mathrm{sgn}\,(\sigma)A$ より $A \in \mathrm{Alt}^p(V)$ となる．つまり，

$$A \in \mathrm{Alt}^p(V) \;\Leftrightarrow\; \forall\sigma \in \mathfrak{S}_p \; s.t.\; \tau_\sigma(A) = \mathrm{sgn}\,(\sigma)A$$

が成り立ち，任意の $A \in \mathrm{Alt}^p(V)$ に対して $\mathcal{A}_p(\mathcal{A}_p(A)) = \mathcal{A}_p(A)$ となることから $\mathcal{A}_p$ は $T^p(V)$ の $\mathrm{Alt}^p(V)$ への射影作用素となり，特にこれを**交代化作用素**という．

また，$p \geq 2$ のとき偶置換と奇置換は同数であることから $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma) = 0$ であり，形式的に空写像を 0 とすることで，

$$\mathcal{S}_p\circ\mathcal{A}_p = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\tau_\sigma\circ\mathcal{A}_p = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma)\mathcal{A}_p = \frac{1}{p!}\mathcal{A}_p\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma) = 0$$

となる．つまり，$p \geq 2$ で $\mathrm{Sym}^p(V)\cap\mathrm{Alt}^p(V) = \emptyset$ である．また，$p = 0$ および $p = 1$ のときは添え字を互換をすることができないため対称テンソルと交代テンソルは定義されない．

以上より，$\mathrm{Sym}^p(V) = \mathrm{Im}\,\mathcal{S}_p$ および $\mathrm{Alt}^p(V) = \mathrm{Im}\,\mathcal{A}_p$ という特徴付けができる．

次に対称化作用素と交代化作用素の核について考える．それぞれの核の集合は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_p =& T^p(V) - \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\tau_\sigma(T^p(V)) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(T^p(V) - \tau_\sigma(T^p(V)))\\
\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}_p =& T^p(V) - \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma)\tau_\sigma(T^p(V)) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}\,(\sigma)(T^p(V) - \tau_\sigma(T^p(V)))
\end{aligned}$$

となり，$T^p_{SK}, T^p_{AK} \subseteq T^p(V)$ がそれぞれ $\operatorname{Ker}\mathcal{S}_p$ および $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_p$ の部分集合であるならば

$$\begin{aligned} T^p_{SK} =& \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(T^p_{SK} - \tau_\sigma(T^p_{SK})) \\ T^p_{AK} =& \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(T^p_{AK} - \operatorname{sgn}(\sigma)\tau_\sigma(T^p_{AK})) \end{aligned}$$

とあらわされる．

ここで，$\operatorname{Ker}\mathcal{S}_p$ について考える．$A \in T^p(V)$ に対して $A' = A - \tau_\sigma(A)$ を定義すれば

$$\mathcal{S}_p(A') = \mathcal{S}_p(A) - \mathcal{S}_p(\tau_\sigma(A)) = 0$$

となるため $A' \in \operatorname{Ker}\mathcal{S}_p$ である．つまり，$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ と $A \in T^p(V)$ が全域を動くことにより得られる集合を M^p とすれば $M^p = \operatorname{Ker}\mathcal{S}_p$ である．

$\operatorname{Ker}\mathcal{A}_p$ についても同様に，$B \in T^p(V)$ に対して $B' = B - \tau_\sigma(B)$ を定義すれば

$$\mathcal{A}_p(B') = \mathcal{A}_p(B) - \mathcal{A}_p(\tau_\sigma(B)) = 0$$

となるため $B' \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}_p$ である．つまり，$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ と $B \in T^p(V)$ が全域を動くことにより得られる集合を N^p とすれば $N^p = \operatorname{Ker}\mathcal{A}_p$ である．

一般に $\operatorname{Ker}\mathcal{S}_p$ と $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_p$ は $T^p(V)$ の全域を知る必要があることは自明であるが，$\mathfrak{S}_p$ については自明ではない．そこで，M^p と N^p を自明な核の構成として以下の定理を与える．

対称作用素と交代作用素

体 K 上のベクトル空間 V によるテンソル空間 $T^p(V)$ を与え，添え字の置換全体の集合 $\mathfrak{S}_p$ を定義したとする．このとき，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ が集合 X の元の有限個の積で構成されるとする．

$\iota \in X$ による $T^p(V)$ に対する線型組み紐写像 τ_ι により

$$\begin{aligned} M^p_X =& \{A - \tau_\iota(A) \mid A \in T^p(V), \iota \in X\} \\ N^p_X =& \{B - \operatorname{sgn}(\iota)\tau_\iota(B) \mid B \in T^p(V), \iota \in X\} \end{aligned}$$

とすれば $\operatorname{Ker}\mathcal{S}_p = M^p_X$ および $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_p = N^p_X$ が成り立つ．

Proof.

$\operatorname{Ker}\mathcal{S}_p = M^p$ および $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_p = N^p$ を自明な核の構成として与える．

M^p_X の元に τ_ι を作用させたとき $\iota' \in X$ とすれば

$$\begin{aligned} \tau_\iota(A - \tau_{\iota'}(A)) =& \tau_\iota(A) - \tau_\iota(\tau_{\iota'}(A)) \\ =& (\tau_{\iota'}(A) - \tau_\iota(\tau_{\iota'}(A))) + (A - \tau_{\iota'}(A)) - (A - \tau_\iota(A)) \end{aligned}$$

であり，$\tau_{\iota'}(A) \in T^p(V)$ であるため $\tau_\iota(A - \tau_{\iota'}(A)) \in M^p_X$ であることがわかる．つまり，$\tau_\iota(M^p_X) \subseteq M^p_X$ である．

任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ が X の元の m 個の積で構成されるとし，それが M^p_X に属することを示せば $M^p = M^p_X$ となる．$A \in T^p(V)$ で $A - \sigma(A) \in M^p_X$ が恒等的に成り立つことを数学的帰納法により示す．

$m = 1$ のときは $A - \tau_\sigma(A) \in M^p_X$ となることは自明であるため，m で $A - \tau_\sigma(A) \in M^p_X$ が成り立つことを仮定して $m+1$ で成り立つことを示す．なお，σ' を X の m 個の元の積，$\iota \in X$，$\sigma = \iota \circ \sigma'$ とする．

$$A - \tau_\sigma(A) = A - \tau_{\iota\circ\sigma'}(A) = A - (\tau_\iota \circ \tau_{\sigma'})(A) = A - \tau_\iota(A) + \tau_\iota(A - \tau_{\sigma'}(A))$$

よって，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $A - \tau_\sigma(A) \in M^p_X$ が成り立つ．これより $M^p_X = M^p$ で $\operatorname{Ker}\mathcal{S}_p = M^p$ であるため $M^p_X = \operatorname{Ker}\mathcal{S}_p$ である．

N^p_X についても同様に示される．

よって，命題は証明された．

□

この定理は例えば $X = \{(1\ 2), (2\ 3), \cdots, (p-1\ p)\}$ といった互換の集合に適応することができる．

対称テンソルと交代テンソルの次元

体 K 上のベクトル空間 V による対称テンソル空間 $\mathrm{Sym}^p(V)$ と交代テンソル空間 $\mathrm{Alt}^p(V)$ で $\dim V = n$ としたとき，それぞれの次元は

$$\dim \mathrm{Sym}^p(V) = \binom{n+p-1}{p}$$
$$\dim \mathrm{Alt}^p(V) = \binom{n}{p}$$

である．ただし，$\mathrm{Alt}^p(V)$ では $p \leq n$ とする．

Proof.

テンソル空間 $T^p(V)$ の基底の数は n^p 個であるが，対称テンソルは添え字の互換に対して不変であるため，V の基底のテンソル積の順序に対して成分は不変である．つまり，n 種類の V の基底から p 個を重複を許して選ぶ組み合わせに等しくなることから

$$\dim \mathrm{Sym}^p(V) = \binom{n+p-1}{p}$$

となる．

交代テンソルはテンソルの基底が 2 個以上の同じ V の基底のテンソル積によって構成されるならば，交代化作用素の定義より成分は打ち消されるため同じ V の基底が存在する基底は打ち消される．つまり，$\mathrm{Alt}^p(V)$ の基底は高々 n 個の V の基底のテンソル積で構成されなければならなく $p \leq n$ であり，n 種類の V の基底から p 個を選ぶ組み合わせに等しくなることから

$$\dim \mathrm{Alt}^p(V) = \binom{n}{p}$$

となる．また，$p > n$ のときの次元は 0 である．

よって，命題は証明された．

□

これらのことは共変テンソルでも同様のことが成り立つ．

第 2 章

テンソル代数

2.1 テンソル代数の定義

添字集合としての $\mathbb{N}$ に対応する体 K 上のベクトル空間の集合族 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ による無限直和

$$V = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} V_i$$

を与えれば，$v_i \in V$ に対する $(v_0, v_1, \cdots) \in V$ という無限列として考えることにより V が K 上のベクトル空間であることは自明であり，これを**次数付きベクトル空間**ということもある．特に，$\dim V_i = i$ で $V_0 = K$ とすれば，任意の体 K 上のベクトル空間の演算は V で閉じた演算となる．

これをテンソルのテンソル積でも同様のことを考えることで以下の定義を与えられる．

定義 5.

体 K 上のベクトル空間 V による反変テンソル空間 $T^p(V)$ により以下のように無限直和集合を与えたとする．

$$T(V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} T^p(V)$$

これは K 上の全ての反変テンソルを包含しており，$T(V)$ の任意の元によるテンソル積の演算が閉じたベクトル空間となる．このベクトル空間を V の**テンソル代数**といい，テンソル積の定義された無限次元のベクトル空間に等しいことがわかる．$T^p(V) \subset T(V)$ とみなすことができるため，$A \in T^p(V)$ が $v_i \in V$ で $A = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ の形であらわすことができる $T(V)$ の元が存在し，これを**分解可能テンソル**といい，$T(V)$ の任意の元は分解可能テンソルの和であらわされる．また，$(T(V), \otimes)$ の単位元は明らかに K の乗法単位元であることから $(T(V), \otimes)$ はモノイドである．つまり，$T(V)$ は K 上の多元環である．

2.2 テンソル代数の普遍性

テンソル代数の普遍性

体 K 上のベクトル空間 V と多元環 A を与えたとする．線型写像 $f : V \to A$ が与えられたとき，準同型写像 $\tilde{f} : T(V) \to A$ で $f = \tilde{f} \circ \iota$ となる $\tilde{f}$ が同型を除き一意に存在し，以下の可換図式を満たす．なお，ι は包含写像である．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & T(V) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

これをテンソル代数の**普遍性**という．また，これらの性質を満たす $(T(V), \iota)$ とは別の組 $(T(V)', \iota')$ が存在するとき，線型同型写像 $\tilde{f}_0 : T(V) \to T(V)'$ で $\tilde{f}_0 \circ \iota = \iota'$ となるものが同型を除き一意に存在する．

Proof.

$p \geq 2$ で線型写像

$$\begin{array}{ccc} V \times \cdots \times V & \longrightarrow & A \\ \cup & & \cup \\ (v_1, \cdots, v_p) & \longmapsto & F(v_1) \cdots F(v_p) \end{array}$$

を与えれば，テンソル積の普遍性より，以下のような線型写像が同型を除き一意に存在する．

$$\begin{array}{ccc} T^p(V) & \xrightarrow{f_p} & A \\ \cup & & \cup \\ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) & \longmapsto & f(v_1) \cdots f(v_p) \end{array}$$

$f_1 = f$ および A の乗法単位元 e で $\alpha \in T^0(V) = K$ に対して $f_0(\alpha) = \alpha e$ とする．$T_p \in T^p(V)$ を用いて $T \in T(V)$ が

$$T = \sum_{p \in \mathbb{N}} T_p$$

とあらわされるとし，

$$\tilde{f}(T) = \sum_{p \in \mathbb{N}} f_p(T_p) \in A$$

とおくと $\tilde{f} : T(V) \to A$ は明らかに線型写像である．また，分解可能テンソル $t, t' \in T(V)$ で

$$\tilde{f}(t \otimes t') = \tilde{f}(t)\tilde{f}(t')$$

が成り立つことはテンソル積の定義より適当な p に対して $t \otimes t' \in T^p(V)$ であるため，f_p の定義より自明である．$T(V)$ の任意の元は T のように分解可能テンソルの和であらわされることから $\tilde{f}$ は準同型写像となり，$f = \tilde{f} \circ \iota$ となる多元環上の準同型写像 $\tilde{f}$ の存在が示された．

また，$\tilde{f}$ は K の乗法単位元を e_K に対して $\tilde{f}(e_K) = e$ であることと $f = \tilde{f} \circ \iota$ により，$V \cup \{e_K\}$ を生成系として $\tilde{f}$ は決定される．$\tilde{f}$ は多元環上の準同型写像であるため，$T(V)$ 上でも f により同型を除き一意に決定される．

次に一意性について示す．

以下のような可換図式を与えることでテンソル積の普遍性における一意性と同様にして証明される．

$$\begin{tikzcd} & T(V)' \arrow[d, shift left, "\tilde{g}_0"] \\ V \arrow[ur, "\iota'"] \arrow[r, "\iota"'] & T(V) \arrow[u, shift left, "\tilde{f}_0"] \end{tikzcd}$$

よって，命題は証明された．

□

2.3 対称代数

定義 6.

体 K 上のベクトル空間 V による対称テンソル空間 $\mathrm{Sym}^p(V)$ により以下のように無限直和集合を与えたとする．なお，$\mathrm{Sym}^0(V) = K$ とする．

$$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{Sym}^p(V)$$

これを対称代数という．

体 K 上のベクトル空間 V による対称代数 $\mathrm{Sym}(V)$ の任意の元は定義より分解可能テンソル $T_p \in \mathrm{Sym}^p(V)$ を用いて

$$T = \sum_{p\in\mathbb{N}} T_p \in \mathrm{Sym}(V)$$

のように和であらわされる．そこで $T, T' \in \mathrm{Sym}(V)$ における積はテンソル積に対称化作用素 $\mathcal{S}_p$ を作用させたものとして二項演算子 $\cdot$ を用いた代数系 $(\mathrm{Sym}(V), \cdot)$ を考える．

このとき，$T \cdot T'$ は

$$T \cdot T' = \sum_{p,q} T_p \cdot T'_q = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p+q=k} \mathcal{S}_k(T_p \otimes T'_q) \right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_k \left(\sum_{p+q=k} T_p \otimes T'_q \right)$$

となり，$(\mathrm{Sym}(V), \cdot)$ は双線型である．T に対する対称化作用素 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S}(T) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_p(T_p)$$

としたとき，商写像 π を用いた以下の可換図式を与えることでベクトル空間としての同型写像 φ が与えられる．

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mathcal{S}"'] & T(V)/\mathrm{Ker}\,\mathcal{S} \arrow[d, "\varphi"] \\
& \mathrm{Sym}(V)
\end{tikzcd}$$

包含写像 $\iota : \mathrm{Sym}(V) \to T(V)$ を定義すれば，φ の逆写像について $\varphi^{-1} = \pi \circ \iota$ が成り立つ．

ここで，以下の補題を示す．

補題 1.　体 K 上のベクトル空間 V によるテンソル空間 $T^q(V)$ と対称化作用素 $\mathcal{S}_p$ の核 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_p$ について

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_p \otimes T^q(V) \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_{p+q}$$
$$T^q(V) \otimes \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_p \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_{p+q}$$

が成り立つ．

Proof.

$v_i \in V$ に対して $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in T^p(V), v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q} \in T^q(V)$ とし，添え字の置換全体の集合 $\mathfrak{S}_p$ で $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ を用いて $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tilde{\sigma}(n) = \begin{cases} \sigma(n) & (n = 1, \cdots, p) \\ n & (n = p+1, \cdots, p+q) \end{cases}$$

と定義した $\tilde{\sigma}$ が自然に $\mathfrak{S}_{p+q}$ の元となるとする．このとき，線型組み紐写像 τ_σ は

$$\tau_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q} = \tau_{\tilde{\sigma}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q})$$

とあらわされる．つまり，テンソル空間と対称化作用素の線型性より $T \in T^p(V), T' \in T^q(V)$ に対して

$$(\tau_\sigma(T)) \otimes T' = \tau_{\sigma'}(T \otimes T')$$

が成り立つ．$\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_p$ は $T - \tau_\sigma(T)$ によって生成されるテンソル全体であるため，$\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_p \otimes T^q(V)$ の任意の元は

$$(T - \mathcal{S}_p(T)) \otimes T' = T \otimes T' - \tau_{\tilde{\sigma}}(T \otimes T')$$

となり，$T \otimes T' \in T^{p+q}(V)$ および $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_{p+q}$ であるため $(T - \mathcal{S}_p(T)) \otimes T' \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_{p+q}$ である．よって，$\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_p \otimes T^q(V) \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_{p+q}$ である．

同様にして，$T^q(V) \otimes \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_p \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_{p+q}$ も示される．

よって，命題は証明された．

□

この補題と

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{S} \cap T^p(V) = \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$$

で $\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$ は $\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_p$ の和で構成されることから $\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$ は $T(V)$ のイデアルであることがわかる．よって，$T(V)/\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$ は商多元環で自然な多元環であり，次数付き多元環である．また，$(\mathrm{Sym}(V), \cdot)$ は $T, T' \in \mathrm{Sym}(V)$ に対して

$$\begin{aligned} T \cdot T' =& \mathcal{S}(\iota(T) \otimes \iota(T')) \\ =& \varphi(\pi(\iota(T) \otimes \iota(T'))) \\ =& \varphi(\pi(\iota(T)) \cdot \pi(\iota(T'))) \\ =& \varphi(\varphi^{-1}(T) \cdot \varphi^{-1}(T'))) \end{aligned}$$

となり，$T(V)/\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$ 上では結合法則を満たすことから $\mathrm{Sym}(V)$ 上でも結合法則を満たす．つまり，φ は多元環としての同型写像であり，$\mathcal{S}$ も多元環としての準同型写像である．また，対称代数の定義より $\mathrm{Sym}(V)$ は次数付きベクトル空間であるが，補題より

$$\mathrm{Sym}^p(V) \cdot \mathrm{Sym}^q(V) \subseteq \mathrm{Sym}^{p+q}(V)$$

であることから $\mathrm{Sym}(V)$ は次数付き多元環となる．これより，φ は $\mathrm{Sym}(V)$ と $T(V)/\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$ の同じ次数の元が対応する．

また，イデアルの生成元に関する以下の定理が成り立つ．

イデアルの生成元

体 K 上のベクトル空間 V によるテンソル代数 $T(V)$ のイデアルとしての対称化作用素の核 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$ は

$$\{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\}$$

で生成される．

Proof.

$\{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\}$ で生成される $T(V)$ のイデアルを I とする．また，添え字の互換の集合 $X = \{(1\ 2), (2\ 3), \cdots, (p-1\ p)\}$ で $\sigma \in X$ による線型組み紐写像 τ_σ を与えるとする．

$v_i \in V$ により $T \in T^p(V)$ が $T = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ とすれば，$\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}_p$ の生成系は $\{T - \tau_\sigma(T)\}$ で十分であり，$\sigma = (i\ i+1)$ とすれば

$$\begin{aligned} T - \tau_\sigma(T) =& v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_p - v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_p \\ =& v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i+1}(\otimes v_i \otimes v_{i+1} - v_{i+1} \otimes v_i) \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \otimes v_p \end{aligned}$$

であるため $T - \tau_\sigma(T) \in I$ であり，$\mathrm{Ker}\,\mathcal{S} \subseteq I$ となる．

I の任意の元は $T_1, T_2 \in T(V)$ によって

$$T_1 \otimes (v \otimes w - w \otimes v) \otimes T_2$$

の形の元の線型結合であり，これが $\mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$ の元となるには線型性より T_1, T_2 が分解可能テンソルである場合のみを示せば十分である．これは明らかに $T - \tau_\sigma(T)$ の形になるため $T_1 \otimes (v \otimes w - w \otimes v) \otimes T_2 \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$ であり，$I \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$ であるため，$I = \mathrm{Ker}\,\mathcal{S}$ となる．

よって，命題は証明された．

□