ベクトル空間論 -ジョルダン標準形-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2019 年 3 月 24 日
最終更新 2019 年 3 月 24 日

目次

第 1 章

固有値とスペクトル

1.1　相似変換

まずは，以下の定義を与える．

定義 1.1

体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n\times n}$ に対して，適当な行列 P により

$$A \to P^{-1}AP$$

といった写像を与えたとする．このような写像を**相似変換 (similarity transformation)** という．

相似変換に対して以下の定理が与えられる．

定理 1.1

正方行列に対する相似変換の前後により，以下の量が不変である．

1). 行列式
2). 固有値
3). 固有多項式
4). 階数
5). トレース

Proof.

体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n\times n}$ と正則行列 $P \in K^{n\times n}$ を与えたとする．まず，行列式について，P の行列式は 0_K でないかつ有限だから

$$|P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \frac{1}{|P|}|A||P| = |A|$$

となり，A に対する行列式に等しい．固有値について，変数 $x \in K$ による固有多項式 $p(x)$ から

$$p(x) = |P^{-1}AP - xI| = |P^{-1}||A - PxIP^{-1}||P| = \frac{1}{|P|}|A - xI||P| = |A - xI|$$

となり，A に対する固有多項式に等しい，つまり固有値は等しい．なお，I は単位行列である．

P は正則行列であることから P による線型写像は次元を変化させない．つまり，$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A$ であることから相似変換の前後で階数は不変である．トレースは固有値の総和であることから相似変換の前後で不変である．

よって，命題は証明された．

□

実数体 $\mathbb{R}$ における n 次の正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ の対角化可能の必要十分条件は，固有ベクトルだけで $\mathbb{R}^n$ の基底を構成することができるということであった．ここで，体 K 上の n 次の正方行列 $B \in K^{n\times n}$ を対角化することを考えたとき，実数体の場合と同様の必要十分条件であるが，この場合においては弱い必要条件を加えるべきである．

その必要条件とは，B が重複を含め n 個の固有値をもたなければならないということである．n 個の固有値が存在しなければ，n 本の固有ベクトルが存在しないということと同値であり，体 K が n 個の固有値をもつ n 次の正方行列を生成するような代数的構造であることをも考えるべきである．

ここで，この必要条件に関して以下の補題を示す．

補題 1.1　複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ は重複を含め n 個の固有値を必ずもつ．

Proof.

A の固有多項式 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ は n 次の多項式である．代数学の基本定理より，$p(x)$ は複素数の範囲で重複を含め n 個の根をもち，その根は A の固有値であることから A は n 個の固有値をもつ．

よって，命題は証明された．

□

この補題により，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の正方行列は対角化できることがあるということが示された．そのため，一般に行列の固有値を扱う問題は複素数体上で考える．

ここで，複素数体上の行列に関する定義を与える．

定義 1.2

複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義される $m \times n$ 行列 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ の全ての成分の共役をとり転置した行列を**エルミート転置 (Hermitian transpose)** もしくは**随伴行列 (adjoint matrix)** といい，A^* とあらわす．特に，$A = A^*$ である行列を**エルミート行列 (Hermitian matrix)** もしくは**自己随伴行列 (self-adjoint matrix)** という．

また，n 次の正方行列 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ で単位行列 I を用いて

$$U^*U = UU^* = I$$

となるとき，U を**ユニタリ行列 (Unitary matrix)** という．ユニタリ行列の各成分が実数であるとき，これは直交行列に等しい．

この定義を用いることで，以下の定理を与えることができる．

定理 1.2　三角化定理

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の重複を含めた固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする．このとき，適当なユニタリ行列 U によって

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とあらわすことができる．このように相似変換により上三角行列に変換することを**三角化**といい，この定理を**三角化定理**という．

Proof.

数学的帰納法により証明をする．$n = 1$ のときは自明であるため，$n-1$ で成り立つことを仮定して，n で成り立つことを示す．

A の固有値 λ_1 に対する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1$ とし，$\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となるように $\boldsymbol{u}_1$ を含めた基底を選択し，それらの集合をによるユニタリ行列 $U_1 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ を与える．$\boldsymbol{e}_k$ を $\mathbb{C}^n$ の基本ベクトルとすれば

$$\begin{aligned} U_1^*AU_1 &= U_1^*(\lambda_1\boldsymbol{u}_1, A\boldsymbol{u}_2, \cdots, A\boldsymbol{u}_n) \\ &= (\lambda_1\boldsymbol{e}_1, U_1^*A\boldsymbol{u}_2, \cdots, U_1^*A\boldsymbol{u}_n) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \boldsymbol{0} & B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり，これにより $n-1$ 次の正方行列 B が生成される．定理 1.1 より A と $U_1^*AU_1$ は同じ固有値をもつため，B は λ_1 以外の A と同じ固有値をもつ．仮定より B はユニタリ行列により三角化可能であるため，適当なユニタリ行列 U_2 により

$$U_2^*BU_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & & * \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とあらわすことができる．ここで，

$$U = U_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U_2 \end{pmatrix}$$

と定義すれば

$$\begin{aligned} U^*AU &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U_2 \end{pmatrix}^* U_1^*AU_1 \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & U_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ \mathbf{0} & U_2^*BU_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

補題 1.2　複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の三角行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の対角成分は A の固有値である．

Proof.

上三角行列の場合を示す．固有方程式 $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ は A の対角成分 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ と単位行列 I を用いて

$$\begin{aligned} p(x) =& |A - xI| \\ =& \begin{vmatrix} \lambda_1 - x & & & * \\ & \lambda_2 - x & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n - x \end{vmatrix} \\ =& (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\cdots(\lambda_n - x) \end{aligned}$$

となることから，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ は A の固有値である．また，A と A^T の固有値は等しいことから下三角行列の場合も同様である．

よって，命題は証明された．

□

補題 1.3　複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の行列式は固有値の積に等しい．

Proof.

定理 1.2 より A は三角化可能であり，その行列式は定理 1.1 より三角化の前後で等しい．補題 1.2 より三角行列の対角成分は固有値であり，三角行列の行列式は余因子展開により対角成分の積となることから，行列式は固有値の積に等しい．

よって，命題は証明された．

□

1.2　行列と多項式

行列に関する多項式で最も基本的な多項式は固有多項式である．しかし，一般の場合を考えれば行列を変数とした多項式や行列を係数とした多項式を考えることがある．行列を変数としたものを**行列多項式 (matrix polynomial)** といい，行列を係数としたものを**多項式行列 (polynomial matrix)** という．特に，行列多項式は冪乗の行列を考えるため，変数の行列は一般に正方行列である．

ここで，行列多項式に関する以下の定理を与える．

定理 1.3　ペロン=フロベニウスの定理

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の係数 $a_0, a_2, \cdots, a_m \in \mathbb{C}$ による $\mathbb{C}-$ 係数多項式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

に対して，n 次の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ としたとき，$p(A)$ の固有値は $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \cdots, p(\lambda_n)$ で与えられる．これを**ペロン=フロベニウスの定理 (Perron-Frobenius theorem)** という．

Proof.

定理 1.2 より A をユニタリ行列 U で

$$U^*AU = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とあらわすとすれば，

$$(U^*AU)^k = U^*A^kU = D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & * \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

となる．これにより，単位行列 I を用いて

$$\begin{aligned} U^*p(A)U =& U^*(a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m) \\ =& a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_m D^m \\ =& \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & & * \\ & p(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p(\lambda_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり，これは U により三角化されていることを示している．

よって，命題は証明された．

□

定理 1.4　ケーリー・ハミルトンの定理

可換環 R 上の n 次の正方行列 $A \in R^{n\times n}$ の固有多項式 $p(x) = |A - xI|$ で，零行列 O により

$$p(A) = O$$

が成り立つ．なお，I は単位行列である．これを**ケーリー・ハミルトンの定理 (Cayley–Hamilton theorem)** という．

Proof.

$A - xI$ の余因子行列 $\mathrm{adj}\,(A - xI)$ は各成分が高々 $n-1$ 次の x の多項式であることから，x の次数ごとに適当な行列 $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$ を用いて

$$\mathrm{adj}\,(A - xI) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_{n-1} x^{n-1}$$

とあらわすことができる．また，余因子行列と元の行列は可換であることから

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}\,(A - xI) \cdot (A - xI) =& (A - xI) \cdot \mathrm{adj}\,(A - xI)\\ \mathrm{adj}\,(A - xI) \cdot A - \mathrm{adj}\,(A - xI)x =& A \cdot \mathrm{adj}\,(A - xI) - x\mathrm{adj}\,(A - xI)\\ \mathrm{adj}\,(A - xI) \cdot A =& A \cdot \mathrm{adj}\,(A - xI)\end{aligned}$$

であり，A と B の積が可換であることがわかる．さらに

$$\mathrm{adj}\,(A - xI) \cdot (A - xI) = |A - xI|I = p(x)I$$

であるため

$$\begin{aligned}p(x)I =& (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_{n-1} x^{n-1})(A - xI)\\ =& (B_0 A + B_1 A x + B_2 A x^2 + \cdots + B_{n-1} A x^{n-1}) - (B_0 x + B_1 x^2 + B_2 x^3 + \cdots + B_{n-1} x^n).\end{aligned}$$

A と B の積が可換であるため $x = A$ とすることができ，$p(A) = O$ となる．

よって，命題は証明された．

□

定理 1.5

体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n \times n}$ による零行列 O を用いた多項式の集合

$$I_A = \{f(x) \in K[x] \mid f(A) = O\}$$

を与えたとき，最小次数で最高次係数が 1_K となる多項式 $\varphi_A(x) \in K[x]$ がただ 1 つ存在し，$\varphi_A(x)$ で任意の $f(x) \in I_A$ は整除可能である．また，I_A の任意の元の根は A の固有値全体を含む．

Proof.

I_A に属する多項式のうち，最小次数で最高次係数が 1_K となる多項式を $\varphi_A(x)$ を与えたとき，任意の $f(x) \in K[x]$ は 0_K もしくは $\varphi_A(x)$ より次数の小さい $r(x) \in K[x]$ と適当な $q(x) \in K[x]$ により

$$f(x) = q(x)\varphi_A(x) + r(x)$$

とあらわすことができる．仮定より $f(A) = \varphi(A) = O$ であるため，$r(A) = O$ であり，$r(x) \in I_A$ である．$r(x) \neq 0_K$ であるならば，$\varphi(x)$ が最小次数の多項式であることに矛盾するため $r(x) = 0_K$ であり，$\varphi_A(x)$ で $f(x)$ は整除可能である．また，最小次数で最高次係数が 1 となる $\varphi_A(x)$ とは別の $\varphi'_A(x) \in I_A$ の存在を仮定したとき，$\varphi_A(x) \mid \varphi'_A(x)$ かつ $\varphi'_A(x) \mid \varphi_A(x)$ となり，共に整除可能であることから $\varphi(x) \neq \varphi(x)$ に矛盾するため，$\varphi_A(x) = \varphi'_A(x)$ となる．

A の固有多項式を $p(x) \in K[x]$ としたとき，定理 1.4 より $p(A) = O$ であるため $p(x) \in I_A$ である．また，任意の A の固有値 λ とそれに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ を与えれば，任意の $k \in \mathbb{N}$ を用いて

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; A^k\boldsymbol{x} = \lambda^k\boldsymbol{x}$$

となる．ここで，任意の $f(x) \in I_A$ の次数を r とし，適当な係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_r$ を用いて

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r$$

とあらわせば，単位行列を I とすることで

$$\begin{aligned}f(A)\boldsymbol{x} =& (a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_r A^r)\boldsymbol{x}\\ =& (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_r\lambda^r)\boldsymbol{x}\\ =& f(\lambda)\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

となる．仮定より $f(A)=O$ であり，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ であることから，$f(\lambda)=0_K$ である．すなわち，A の固有値全体は $f(x)$ の根である．

よって，命題は証明された．

□

この定理により与えられた多項式について，以下の定義を与える．

定義 1.3

体 K 上の n 次の正方行列 $A\in K^{n\times n}$ による零行列 O を用いた多項式の集合 $\{f(x)\in K[x]\,|\,f(A)=O\}$ のうち，最小次数で最高次係数が 1_K となる多項式を A の K 上の**最小多項式 (minimal polynomial)** という．

ここで，可換体 K 上の n 次の正方行列 $A\in K^{n\times n}$ の最小多項式 $\varphi_A(x)\in K[x]$ について考える．このとき，A のそれぞれ異なる固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ と $N_1,N_2,\cdots,N_r\in\mathbb{N}$ を用いて

$$\varphi_A(x)=(x-\lambda_1)^{N_1}(x-\lambda_2)^{N_2}\cdots(x-\lambda_r)^{N_r}$$

とあらわすとする．ここで，$\varphi_A(x)$ の逆数をとり，その部分分数分解を適当な $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_r(x)\in K[x]$ をとり

$$\frac{1}{\varphi_A(x)}=\frac{p_1(x)}{(x-\lambda_1)^{N_1}}+\frac{p_2(x)}{(x-\lambda_2)^{N_2}}+\cdots+\frac{p_r(x)}{(x-\lambda_r)^{N_r}}$$

とあらわすことができる．また，

$$P_1(x)=\frac{p_1(x)\varphi_A(x)}{(x-\lambda_1)^{N_1}},\quad P_2(x)=\frac{p_2(x)\varphi_A(x)}{(x-\lambda_2)^{N_2}},\cdots,\quad P_r(x)=\frac{p_r(x)\varphi_A(x)}{(x-\lambda_r)^{N_r}}$$

と定義をし，$\varphi_A(x)$ の逆数の部分分数分解表示の両辺に $\varphi_A(x)$ をかけることで

$$1=P_1(x)+P_2(x)+\cdots+P_r(x)$$

といった除算を含まない多項式が得られる．

ここで，零行列 O を用いた多項式の集合 $I_A=\{f(x)\in K[x]\,|\,f(A)=O\}$ を定義したとき，

$$(x-\lambda_k)^{N_k}P_k(x)=p_k(x)\varphi_A(A)$$

より $(x-\lambda_k)^{N_k}P_k(x)$ は $\varphi_A(x)$ で整除可能であることから定理 1.5 より $(x-\lambda_k)^{N_k}P_k(x)\in I_A$ である．

これより，これらのことを以下の補題として与えることができる．

補題 1.4　可換体 K 上の n 次の正方行列 $A\in K^{n\times n}$ について，最小多項式 $\varphi_A(x)\in K[x]$ が A のそれぞれ異なる固有値 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ と $N_1,N_2,\cdots,N_r\in\mathbb{N}$ により

$$\varphi_A(x)=(x-\lambda_1)^{N_1}(x-\lambda_2)^{N_2}\cdots(x-\lambda_r)^{N_r}$$

と与えられたとする．このとき，単位行列 I およびクロネッカーのデルタ δ_{ij} を用いて

$$\begin{cases} I=P_1(A)+P_2(A)+\cdots+P_r(A)\\ (A-\lambda_kI)^{N_k}P_k(A)=O\\ P_k(A)A=AP_k(A)\\ P_i(A)P_j(A)=\delta_{ij}P_i(A)\end{cases}$$

を満たす $K-$ 係数多項式 $P_1(x),P_2(x),\cdots,P_r(x)\in K[x]$ が一意に存在する．

Proof.

この補題の導入より第 1 式と第 2 式と第 3 式，および一意性については明らかである．第 4 式について，適当な多項式 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_r(x)$ により

$$(x-\lambda_k)^{N_k}P_k(x)=p_k(x)\varphi_A(A)$$

と与えれば $P_k(x)$ は $i \neq j$ で

$$P_i(x) = p_i(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i, k\neq j}}^{r} (x-\lambda_k)^{N_k}(x-\lambda_j)^{N_j}$$

とあらわすことができる．つまり，$i \neq j$ で

$$P_i(A)P_j(A) = p_i(A) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i, k\neq j}}^{r} (A-\lambda_k I)^{N_k}(A-\lambda_j I)^{N_j} P_j(A) = p_i(A) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i, k\neq j}}^{r} (A-\lambda_k I)^{N_k} O = O$$

となり，これを用いて $i = j$ では第 1 式に $P_i(A)$ を作用させることで

$$P_i(A) = P_1(A)P_i(A) + P_2(A)P_i(A) + \cdots + P_r(A)P_i(A) = P_i(A)P_i(A).$$

よって，命題は証明された．

□

この補題より，ベクトル空間 $V = K^n$ の任意の元 $\boldsymbol{v} \in V$ について，$\boldsymbol{v}_k = P_k(A)$ として

$$\boldsymbol{v} = P_1(A)\boldsymbol{v} + P_2(A)\boldsymbol{v} + \cdots + P_r(A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_r$$

とあらわすことができる．このとき，補題 1.4 より

$$P_i(A)\boldsymbol{v} = P_i(A)P_j(A)\boldsymbol{v} = \delta_{ij}P_i\boldsymbol{v} = \delta_{ij}\boldsymbol{v}_i$$

となることから，$P_k(A)$ は V の任意の元を V の部分空間

$$W_k = \{\boldsymbol{v} \in V \mid P_k(A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\}$$

への射影を与えていることがわかる．

また，$i \neq j$ とすれば任意の $\boldsymbol{w}_i \in W_i$ について $P_j(A)\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0}$ となることから，$W_i \cap W_j = \{\boldsymbol{0}\}$，すなわち W_i と W_j は互いに素であり，V は

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$$

のように直和分解することができる．特に，W_k は補題 1.4 より

$$(A-\lambda_k I)^{N_k}P_k(A)\boldsymbol{v} = (A-\lambda_k I)^{N_k}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

となることから

$$W_k = \left\{\boldsymbol{v} \in V \,\middle|\, (A-\lambda_k I)^{N_k}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\right\} = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_k I)^{N_k}$$

とあらわすことができる．

次に，$P_1(A), P_2(A), \cdots, P_r(A)$ の示す写像を $P_1, P_2, \cdots, P_r$ として，射影としてのより一般のこれらの性質について考える．部分空間への射影であることについて考えれば，$P_k^2 = P_k$ が成り立つことが P_k が射影であることの必要十分条件となることは自明であり，$i \neq j$ であるとき $P_i \circ P_j = 0$ となるということは，射影後の V の部分空間 $W_i = P_i(V), W_j = P_j(V)$ が互いに素，すなわち $W_i \cap W_j = \{\boldsymbol{0}\}$ となるという射影の性質として得られるとするべきである．

ここで，ベクトル空間に対する射影について，より一般の定義を与える．

定義 1.4

体 K 上のベクトル空間 V に対する線型写像 $P : V \to V$ で $P^2 = P$ を満たすとき，P を V に対する**射影作用素 (projection)** という．

ここで，射影作用素に関する定理を与える．

定理 1.6

体 K 上のベクトル空間 V とその射影作用素 P と部分空間 $W = P(V)$ を定義したとき，以下の性質を満たす．

1). $P : W \to W$ を考えたとき，P は恒等写像として作用する．

2). P の表現行列を A としたとき，単位行列を用いて $I - A$ としたものも射影作用素である．

3). $I - A$ を示す写像を P' として $U = P'(V)$ としたとき，V の P による自明な直和分解 $V = W \oplus U$ となる．

Proof.

第 1 式について，$P^2 = P$ より，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ で $P(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \in W$ とすれば

$$P^2(\boldsymbol{v}) = P(\boldsymbol{v}) \ \Rightarrow \ P(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$$

となることから，$P : W \to W$ は恒等写像として作用する．

第 2 式について，$A^2 = A$ となることから

$$(I - A)^2 = I - 2A + A^2 = I - 2A + A = I - A.$$

第 3 式について，第 2 式と同様にすることで零行列 O を用いれば

$$\begin{aligned} A(I - A) =& A - A^2 = A - A = O \\ (I - A)A =& A - A^2 = A - A = O \end{aligned}$$

となるため，$P \circ P' = P' \circ P$ は零写像であり，

$$V = W \oplus U.$$

よって，命題は証明された．

□

また，射影作用素と似たような作用をする線型写像として，以下の定義を与える．

定義 1.5

体 K 上のベクトル空間 V に対する線型写像 $f : V \to V$ で V の部分空間 $W \subseteq V$ で $f(W) \subseteq W$ を満たすとき，W を f に対する**不変部分空間**もしくは $f-$ **不変**という．

定理 1.6 より $W_k = P_k(W_k)$ といった関係式が成り立ち，W_k は P_k- 不変であることがただちにわかる．

ここで，不変部分空間に関する補題を与える．

補題 1.5　体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n\times n}$ のそれぞれ異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ と単位行列を I とすることで $W(\lambda_k) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_k I)^l$ を与えたとき，$W_l(\lambda_k)$ は $A-$ 不変である．

Proof.

任意の $\boldsymbol{w}_k \in W(\lambda_k)$ を与えたとき，

$$A\boldsymbol{w}_k = (A\boldsymbol{w}_k - \lambda_k \boldsymbol{w}_k) + \lambda_k \boldsymbol{w}_k$$

であり，仮定より $(A - \lambda_k I)^l \vec{w}_k = \mathbf{0}$ であるため

$$(A - \lambda_k I)^l (A\boldsymbol{w}_k) = (A - \lambda_k I)^{l+1} + (A - \lambda_k I)^l (\lambda_k \boldsymbol{w}_k) = \mathbf{0}.$$

これより，$A\boldsymbol{w}_k \in W(\lambda_k)$ となるため，$W(\lambda_k)$ は A 不変である．

よって，命題は証明された．

□

また，最小多項式と対角化可能について以下の定理を与える．

定理 1.7

可換体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n \times n}$ が対角化可能であることの必要十分条件は，A が重複を含め n 個の固有値が存在し，最小多項式が重根をもたないことである．

Proof.

それぞれ異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ として，十分条件について示す．$V = K^n$ は単位行列 I を用いて $V_k = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_k I)$ を定義することで

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$$

と直和分解することが可能である．V_k は固有値 λ_k に対する固有ベクトルの集合であり，それぞれが互いに素，すなわち線型独立の関係にあるため対角化可能である．

次に，必要条件について示す．対角化可能であるならば適当な行列 P と重複を含めた n 個の固有値 $\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_n$ により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & 0 \\ & \lambda'_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda'_n \end{pmatrix}$$

とあらわすことができ，多項式 $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_r) \in K[x]$ は対角行列の成分に零元が存在する場合における積の性質から零行列 O により $p(A) = O$ となる．$p(x)$ は定理 1.5 より A の最小多項式 $\varphi_A(x) \in K[x]$ で整除可能であることから $\varphi_A(x)$ は重根をもたない．

よって，命題は証明された．

□

1.3　一般固有空間分解

最小多項式を用いて行列の固有ベクトルの集合を用いて対角化可能等について考えたが，ここではその固有ベクトルの集合について考える．

体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n \times n}$ に対するそれぞれことなる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ のそれぞれの固有値に対する固有ベクトルの集合 $V(\lambda_k)$ を単位行列 I を用いて

$$V(\lambda_k) = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda_k \boldsymbol{x}\} = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_k I)$$

と与えたとする．ここで，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V(\lambda_k)$ および $a, b \in K$ を与えたとき

$$A\boldsymbol{x} = \lambda_k \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} = \lambda_k \boldsymbol{y} \;\Rightarrow\; A(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = \lambda_k (a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y})$$

となることから，$V(\lambda_k)$ はベクトル空間であることがわかる．

これらをより一般に扱うために以下の定義を与える．

定義 1.6

体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n \times n}$ の固有方程式 $p(x) \in K[x]$ は，それぞれ異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ と $N_1, N_2, \cdots N_r \in \mathbb{N}$ を用いて

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{N_1} (x - \lambda_2)^{N_2} \cdots (x - \lambda_r)^{N_r}$$

とあらわすとする．このとき，N_k を固有値 λ_k に対する**代数的重複度 (algebraic multiplicity)** という．

また，λ_k に対して単位行列を I として

$$V(\lambda_k) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_k I)$$

による固有ベクトルの集合 $V(\lambda_k)$ はベクトル空間であり，固有値 λ_k に対する**固有空間 (eigenspace)** という．

特に，$\dim V(\lambda_k)$ を固有値 λ_k に対する**幾何的重複度 (geometric multiplicity)** という．

また，固有空間の生成元の冪乗したものを

$$V^k(\lambda_k) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)^k$$

のように記述することとする．

ここで，以下の補題を与える．

補題 1.6　可換体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n\times n}$ のそれぞれ異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ に対する固有空間 $V(\lambda_k)$ について，$i < j$ であるならば $V^i(\lambda_k) \subseteq V^j(\lambda_k)$ である．また，最小多項式 $\varphi_A(x) \in K[x]$ を $N_1, N_2, \cdots, N_r \in \mathbb{N}$ を用いることで

$$\varphi_A(x) = (x - \lambda_1)^{N_1}(x - \lambda_2)^{N_2} \cdots (x - \lambda_r)^{N_r}$$

とすれば，等号成立条件は $i \geq N_k$ である．

Proof.

任意の $\boldsymbol{x} \in V^i(\lambda_k)$ に対して単位行列を I として

$$(A - \lambda_k I)^i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; (A - \lambda_k I)^{i+1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

となることから $V^i(\lambda_k) \subseteq V^{i+1}(\lambda_k)$，すなわち $V^i(\lambda_k) \subseteq V^j(\lambda_k)$ である．

等号成立条件について，λ_k に対する代数的重複度を M_k として，任意の $\boldsymbol{v}_k \in V^{M_k}(\lambda_k)$ で $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ が線型独立であることを数学的帰納法により示す．$k = 1$ のときは自明であるため，$k = r - 1$ で成り立つことを仮定して $k = r$ で成り立つことを示す．$a_1, a_2, \cdots, a_r \in K$ で

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$$

とすれば，$(A - \lambda_k I)^{M_k}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ であるため，

$$\begin{aligned} a_1(A - \lambda_r I)^{M_r}\boldsymbol{v}_1 + a_2(A - \lambda_r I)^{M_r}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_r(A - \lambda_r I)^{M_r}\boldsymbol{v}_r &= \boldsymbol{0} \\ a_1(A - \lambda_r I)^{M_r}\boldsymbol{v}_1 + a_2(A - \lambda_r I)^{M_r}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{r-1}(A - \lambda_r I)^{M_r}\boldsymbol{v}_{r-1} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となり，補題 1.5 より全ての $V^{M_1}(\lambda_1), V^{M_2}(\lambda_2), \cdots, V^{M_r}(\lambda_r)$ は $A-$ 不変であるため，

$$A\boldsymbol{v}_k, \lambda_i \boldsymbol{w}_k \in V^{M_k}(\lambda_k) \;\Rightarrow\; (A - \lambda_i I)\boldsymbol{v}_k \in V^{M_k}(\lambda_k).$$

つまり，$\boldsymbol{v}_k' = (A - \lambda_r I)^{M_r}\boldsymbol{v}_k$ とおいたとき

$$\boldsymbol{v}_1' \in V^{M_1}(\lambda_1), \quad \boldsymbol{v}_2' \in V^{M_2}(\lambda_2), \cdots, \quad \boldsymbol{v}_{r-1}' \in V^{M_{r-1}}(\lambda_{r-1})$$

となり，これらは帰納法の仮定より線型独立である．つまり，

$$a_1\boldsymbol{v}_1' + a_2\boldsymbol{v}_2' + \cdots + a_{r-1}\boldsymbol{v}_{r-1}' = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_{r-1} = 0_K$$

であり，$V^{M_k}(\lambda_k) \neq \{\boldsymbol{0}\}$ かつ $a_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$ より $a_r = 0$ である．よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は線型独立であり，

$$\begin{cases} K^n = V^{N_1}(\lambda_1) \oplus V^{N_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V^{N_r}(\lambda_r) \\ K^n = V^{M_1}(\lambda_1) \oplus V^{M_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V^{M_r}(\lambda_r) \end{cases}$$

の 2 通りの直和分解が得られる．最小多項式の性質より $N_k \leq M_k$ であることから $V^{N_k}(\lambda_k) \subseteq V^{M_k}(\lambda_k)$，すなわち $\dim V^{N_k}(\lambda_k) \leq \dim V^{M_k}(\lambda_k)$ であり，

$$\dim V^{N_1}(\lambda_1) + \dim V^{N_2}(\lambda_2) + \cdots + \dim V^{N_r}(\lambda_r) = \dim V^{M_1}(\lambda_1) + \dim V^{M_2}(\lambda_2) + \cdots + \dim V^{M_r}(\lambda_r)$$

より $\dim V^{N_k}(\lambda_k) = \dim V^{M_k}(\lambda_k)$ となり，$V^{N_k}(\lambda_k) = V^{M_k}(\lambda_k)$ が成り立つ．

よって，命題は証明された．

□

補題 1.7　複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n\times n}$ の重複を含めた固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とする．最小多項式 $\varphi_A(x) \in K[x]$ を $N_1, N_2, \cdots, N_r \in \mathbb{N}$ を用いることで

$$\varphi_A(x) = (x-\lambda_1)^{N_1}(x-\lambda_2)^{N_2}\cdots(x-\lambda_r)^{N_r}$$

とすることにより，λ_k に対する代数的重複度を M_k としたとき，固有空間 $V(\lambda_k)$ に対して

$$\dim V^{N_k}(\lambda_k) = M_k.$$

Proof.

　定理 1.2 より A をユニタリ行列 U で三角化するとき，

$$U^*AU = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とあらわすとすれば

$$\begin{aligned}(A-\lambda_k I)^{M_k} =& \underbrace{UU^*(A-\lambda_k I)UU^*(A-\lambda_k I)\cdots UU^*(A-\lambda_k I)}_{M_k\text{個}}UU^* \\ =& U\underbrace{(D-\lambda_k I)(D-\lambda_k I)\cdots(D-\lambda_k I)}_{M_k\text{個}}U^* \\ =& U(D-\lambda_k I)^{M_k}U^*.\end{aligned}$$

　$D-\lambda_k I$ は D の対角成分の λ_k が 0 となるため $(D-\lambda_k I)^{M_k}$ は D の λ_k の属する列が $\mathbf{0}$ となる．つまり，

$$\operatorname{rank}(D-I\lambda_k)^{M_k} = n - M_k \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rank}(A-\lambda_k I)^{M_k} = n - M_k$$

となり，次元定理より

$$\begin{aligned}\dim\operatorname{Ker}(A-\lambda_k I)^{M_k} &= n - \operatorname{rank}(A-\lambda_k I)^{M_k} \\ \dim V^{M_k}(\lambda_k) &= M_k\end{aligned}$$

となり，補題 1.6 より $\dim V^{M_k} = \dim V^{N_k}$ となることから $\dim V^{N_k}(\lambda_k) = M_k$ である．

　よって，命題は証明された．

□

　この補題により，以下の定理が与えられる．

定理 1.8

　複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ とその重複を含まない固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ を与えたとする．このとき，λ_k に対する代数的重複度を a_{λ_k}，幾何的重複度を g_{λ_k} としたとき，常に

$$g_{\lambda_k} \le a_{\lambda_k}.$$

Proof.

　λ_k に対する固有空間 $V(\lambda_k)$ を与えれば補題 1.7 より $V(\lambda_k) \subseteq V^{a_{\lambda_k}}(\lambda)$ であるため，$\dim V(\lambda_k) = g_{\lambda_k} \le \dim V^{a_{\lambda_k}}(\lambda)$ である．また，$\dim V^{a_{\lambda_k}}(\lambda) = a_{\lambda_k}$ となることから $g_{\lambda_k} \le a_{\lambda_k}$ が得られる．

　よって，命題は証明された．

□

ここで，ベクトル空間の直和分解に着目し，以下の定義を与える．

定義 1.7

体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n\times n}$ の最小多項式 $\varphi_A(x) \in K[x]$ を，それぞれ異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ と $N_1, N_2, \cdots, N_r \in \mathbb{N}$ を用いて

$$\varphi_A(x) = (x-\lambda_1)^{N_1}(x-\lambda_2)^{N_2}\cdots(x-\lambda_r)^{N_r}$$

とあらわすとする．このとき，固有値 λ_k に対して $l \geq N_k$ を用いて

$$W(\lambda_k) = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda)^l$$

により与えられる集合 $W(\lambda_k)$ はベクトル空間であり，固有値 λ_k に対する**一般固有空間 (generalized eigenspace)** といい，$W(\lambda_k)$ の元を**一般固有ベクトル (generalized eigenvector)** という．

特に，K が可換体であれば，

$$K^n = W(\lambda_1) \oplus W(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r)$$

のような直和分解が成り立つ．

A が対角化可能であるならば K^n は固有空間により直和分解可能であるが，このようにベクトル空間を線型写像 f による固有空間により直和分解可能であるとき，f を**半単純変換 (semisimple transformation)** もしくは単に**半単純 (semisimple)** であるという．

ここで，半単純と射影作用素を関連付ける定理を与える．

定理 1.9

可換体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n\times n}$ が半単純であるとする．それぞれ異なる A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とそのそれぞれの固有値 λ_k に対する固有空間 $V(\lambda_k)$ への射影を与える射影作用素 P_k により

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_r P_r$$

という分解が与えられる．逆に，このような分解が与えられたとき A は半単純である．

Proof.

任意の $\boldsymbol{v}_k \in V(\lambda_k)$ で $A\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k$ が成り立つことから補題 1.4 の第 1 式より，$\boldsymbol{v}_k = P\boldsymbol{v}$ を満たす任意の $\boldsymbol{v} \in K^n$ と A を左右から作用させることで

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{v} =& AP_1\boldsymbol{v} + AP_2\boldsymbol{v} + \cdots + AP_r\boldsymbol{v} \\
=& A\boldsymbol{v}_1 + A\boldsymbol{v}_2 + \cdots + A\boldsymbol{v}_r \\
=& \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{v}_r \\
=& \lambda_1 P_1\boldsymbol{v} + \lambda_2 P_2\boldsymbol{v} + \cdots + \lambda_r P_r\boldsymbol{v} \\
=& (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_r P_r)\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

となり，等式が成り立つ．逆に，このような分解が与えられたとき，射影作用素 P_k による分解から $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ は線型独立となり，$A\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k$ が成り立つことから単位行列 I を用いて

$$\mathrm{Ker}\,(A - I\lambda_k)$$

となる集合，すなわち固有値 λ_k に対する固有空間により直和分解可能，すなわち A は半単純となる．

よって，命題は証明された．

□

第 2 章

ジョルダン標準形

2.1 ジョルダン分解

まずは以下の定義を与える．

定義 2.1

体 K 上のベクトル空間 V に対する線型写像 f が $k \in \mathbb{N}$ により

$$f^k = 0$$

を満たすとする．このとき，f を**冪零変換 (nilpotent transformation)** といい，その表現行列を**冪零行列 (nilpotent matrix)** という．特に，$f^k = 0$ を満たす最小の k を**冪零指数 (nilpotent index)** という．

ここで，冪零行列に関する補題および定理を与える．

補題 2.1 体 K 上の n 次の正方行列 $A \in K^{n \times n}$ が零行列でないかつ冪零行列であるならば，零行列 O を用いて $A^n = O$ が成り立ち，冪零指数 m について $m \leq n$ が成り立つ．

Proof.

固有多項式 $p(x) \in K[x]$ を $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in K$ を用いて

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

と与えたとき，定理 1.4 より $p(A) = O$ であるため，$A^{m-1} \neq O$ より両辺に A^{m-1} をかければ

$$\begin{aligned} p(A)A^{m-1} = a_0 A^{m-1} + a_1 A^m + a_2 A^{m+1} + \cdots + a_{n-1} A^{m+n-2} + A^{m+n-1} &= O \\ a_0 A^{m-1} &= O \end{aligned}$$

となり，$A^{m-1} \neq O$ であるため $a_0 = 0_K$ である．このように $p(A)$ の両辺に $A^{m-2}, A^{m-3}, \cdots$ をかける操作を繰り返すことにより，$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ が 0_K となる．すなわち，$A^n = O$ となる．

よって，命題は証明された．

□

定理 2.1

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の冪零行列 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ の全ての固有値は 0 であり，逆に全ての固有値が 0 であるならば冪零行列である．

Proof.

A の重複を含めた固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ として，A をユニタリ行列 U を用いて三角化するとして

$$
\begin{aligned}
U^*AU =& D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
A^n =& UD^nU^*
\end{aligned}
$$

となり，A が冪零行列ならば A^n は補題 2.1 より零行列であり，D^n が零行列となる．すなわち，$\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_n^n = 0$ となるため全ての固有値は 0 である．逆に全ての固有値が 0 ならば，D^n は零行列となり A^n が零行列，すなわち A は冪零行列となる．

よって，命題は証明された．

□

ここで，行列の分解について以下の補題を与える．

補題 2.2　可換体 K 上の n 次の正方行列 $A, B \in K^{n\times n}$ がそれぞれ半単純であるとする．このとき積が可換である必要十分条件は A と B の全ての固有空間が等しいことである．また，このとき任意の $a, b \in K$ を用いて

$$
\begin{cases} AB \\ aA + bB \end{cases}
$$

も半単純である．

Proof.

A と B の全ての固有空間が等しいということは A と B による射影作用素が全て等しいことと同値である．また，十分性については自明であるため，必要性について示す．

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とし，λ_k に対応する固有空間への射影を与える射影作用素を P_k とする．B に対しても同様に固有値 $\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_r$ と射影作用素 $P'_1, P'_2, \cdots, P'_r$ を与えたとする．このとき，定理 1.9 より

$$
\begin{aligned}
A =& \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_r P_r \\
B =& \lambda'_1 P'_1 + \lambda'_2 P'_2 + \cdots + \lambda'_r P'_r
\end{aligned}
$$

となり，これが可換であるためには P_i と P'_j が可換でなければならないことがわかる．また，補題 1.4 より

$$
\begin{aligned}
A =& (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_r P_r)(P_1 + P_2 + \cdots + P_r) \\
B =& (\lambda'_1 P'_1 + \lambda'_2 P'_2 + \cdots + \lambda'_r P'_r)(P_1 + P_2 + \cdots + P_r)
\end{aligned}
$$

とあらわせば，$P_k P'_k = P_k = P'_k$ が成り立つ必要があり，必要十分条件が示された．

ここで，AB と $aA + bB$ について示すと，

$$
\begin{aligned}
AB =& \lambda_1\lambda'_1 P_1 + \lambda_2\lambda'_2 P_2 + \cdots + \lambda_r\lambda'_r P_r \\
aA + bB =& (a\lambda_1 + b\lambda'_1)P_1 + (a\lambda_2 + b\lambda'_2)P_2 + \cdots + (a\lambda_r + b\lambda'_r)P_r
\end{aligned}
$$

となり，それぞれは半単純となることがわかる．

よって，命題は証明された．

□

補題 2.3　可換体 K 上の n 次の正方行列 $A, B \in K^{n\times n}$ がそれぞれ冪零行列で積が可換であるならば，任意の $a, b \in K$ を用いて

$$
\begin{cases} AB \\ aA + bB \end{cases}
$$

も冪零行列である．

Proof.

補題 2.1 より AB と $aA+bB$ について，零行列を O として

$$\begin{aligned}(AB)^n =& A^nB^n = O \\ (A+B)^{2n} =& \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}A^kB^{2n-k} = O\end{aligned}$$

となるため，それぞれは冪零行列である．

よって，命題は証明された．

□

定理 2.2

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の任意の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ は半単純 ϕ と冪零行列 ψ に加法的に一意に分解可能である．このような分解を**ジョルダン分解 (Jordan decomposition)** という．また，このとき ϕ と ψ の積は可換である．これらをまとめると以下のようになる．

$$\begin{cases}A = \psi + \phi \\ \psi\phi = \phi\psi\end{cases}$$

Proof.

A のそれぞれ異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とし，固有値 λ_k に対する A の一般固有空間への射影を示す射影作用素 P_k を与えたとする．単位行列を I として

$$A = (A-\lambda_k I) + \lambda_k I = \varphi_k + \lambda_k I$$

とおいたとき，補題 1.4 を用いて

$$\begin{aligned}A =& AI = \sum_{k=1}^{r} AP_k \\ =& \sum_{k=1}^{r}(\varphi_k + \lambda_k I)P_k \\ =& \sum_{k=1}^{r}\varphi_k P_k + \sum_{k=1}^{r}\lambda_k P_k = \psi + \phi\end{aligned}$$

としたとき，定理 1.9 より ϕ は半単純である．また，補題 1.4 より $P_kA = AP_k$ であるため

$$\varphi_i P_j = (A-\lambda_i I)P_j = AP_j - \lambda_i P_j = P_j A - P_j\lambda_i = P_j(A-\lambda_i I) = P_j\varphi_i$$

となり，φ_i と P_j は可換であることがわかる．よって，ψ^n は補題 1.4 を用いることで

$$\psi^n = \sum_{k=1}^{r}\varphi_k^n P_k = \sum_{k=1}^{r}(A-\lambda_k I)^n P_k$$

となり，補題 2.1 と補題 1.4 より ψ は冪零行列である．また，補題 1.4 より P_i と P_j の積が可換であることから ψ と ϕ の積も可換である．

次に，一意性について示す．ψ と ϕ とは別の ψ' と ϕ' により $A = \psi' + \phi'$ とあらわすことができると仮定したとき，

$$\psi + \phi = \psi' + \phi' \ \Leftrightarrow\ \psi - \psi' = \phi' - \phi$$

であり，ψ と ϕ の積は可換であるため ψ と $A = \psi + \phi$ は可換であり，ψ' と A の積も可換である．よって，ψ と ψ' の積は可換であり，同様にして ϕ と ϕ' の積も可換である．ここで，補題 2.2 と補題 2.3 より，$\psi - \psi'$ は冪零行列で $\phi' - \phi$ は半単純であり，定理 1.9 と定理 2.1 より半単純かつ冪零行列な行列は零行列 O となる．つまり，$\psi - \psi' = \phi' - \phi = O$ となり，一意性が得られた．

よって，命題は証明された．

□

2.2　ジョルダン標準形の存在

定理 2.2 より，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の任意の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ は半単純 ϕ と冪零行列 ψ に一意に分解可能である．このとき，ϕ はその構成より A の一般固有空間から線型独立になるように n 本の一般固有ベクトルを選ぶことにより対角化が可能であることがわかる．ここで，A に相似変換をすることにより対角化のような行列に対する標準形を定める方法を考える．ϕ は一般固有空間からベクトルを選択することで対角化可能であることから，その基底の選び方により ψ を単純な形に相似変換すればいいということが考えられる．

A のそれぞれ異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ として，λ_k に対する一般固有空間 $W(\lambda_k)$ として，それぞれの $W(\lambda_k)$ の次元 m_k だけ線型独立なベクトル $\boldsymbol{e}_{k,1}, \boldsymbol{e}_{k,2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k,m_k} \in W(\lambda_k)$ を添え字の順序ごとに並べた行列

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{e}_{1,m_1} & \cdots & \boldsymbol{e}_{r,1} & \cdots & \boldsymbol{e}_{r,m_r} \end{pmatrix}$$

を A に作用させた場合を考える．補題 1.5 より $A\boldsymbol{e}_{i,j} \in W(\lambda_k)$ であるため，$A\boldsymbol{e}_{i,j}$ は $W(\lambda_k)$ の基底および係数 $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ を用いて

$$A\boldsymbol{e}_{i,j} = a_{1,j}\boldsymbol{e}_{i,1} + a_{2,j}\boldsymbol{e}_{i,2} + \cdots + a_{m_i,j}\boldsymbol{e}_{i,m_i}$$

とあらわされるため，零行列 O を用いて

$$\begin{aligned}
&A\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{i,1} & \boldsymbol{e}_{i,2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i,m_i} & O \end{pmatrix}}_{n\text{ 列}} \\
=&\underbrace{\begin{pmatrix} A\boldsymbol{e}_{i,1} & A\boldsymbol{e}_{i,2} & \cdots & A\boldsymbol{e}_{i,m_i} & O \end{pmatrix}}_{n\text{ 列}} \\
=&\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{i,1} & \boldsymbol{e}_{i,2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i,m_i} & O \end{pmatrix}}_{n\text{ 列}}
\underbrace{\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m_i} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m_i} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m_i,1} & a_{m_i,2} & \cdots & a_{m_i,m_i} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}}_{n\times n\text{ 行列}}.
\end{aligned}$$

ここで，$A\boldsymbol{e}_{i,j}$ の係数による m_i 次の正方行列 $A_i = (a_{s,t})_{1\leq s,t\leq m_i}$ を定義すれば，

$$A\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{i,1} & \boldsymbol{e}_{i,2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i,m_i} & O \end{pmatrix}}_{n\text{ 列}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{i,1} & \boldsymbol{e}_{i,2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i,m_i} & O \end{pmatrix}}_{n\text{ 列}}\begin{pmatrix} A_i & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

つまり，AP について考えれば，

$$AP = P\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{pmatrix} = P(A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r).$$

また，A の半単純成分 ϕ に P を作用させることを考えれば，ϕ は P で対角化可能であるため

$$\phi P = P\begin{pmatrix}
\lambda_1 & & 0 & & & 0 \\
& \ddots & & & & \\
0 & & \lambda_1 & & & \\
& & & \ddots & & \\
& & & & \lambda_r & 0 \\
& & & & & \ddots & \\
0 & & & & 0 & & \lambda_r
\end{pmatrix}$$

となり，冪零成分 ψ については単位行列を I として $\psi_k = A_k - \lambda_k I$ を定義することで

$$\psi P = P \begin{pmatrix} \psi_1 & & & 0 \\ & \psi_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \psi_r \end{pmatrix} = P(\psi_1 \oplus \psi_2 \oplus \cdots \oplus \psi_r)$$

となり，$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_r$ の最も単純な形にする方法を考えればいい．

ここで，実際に一般固有空間から選択する基底について考える．まず，A の最小多項式 $\varphi_A(x) \in \mathbb{C}[x]$ を $N_1, N_2, \cdots, N_r \in \mathbb{N}$ を用いることで

$$\varphi_A(x) = (x-\lambda_1)^{N_1}(x-\lambda_2)^{N_2}\cdots(x-\lambda_r)^{N_r}$$

とすることにより，$N_k \geq 2$ として λ_k に対する固有空間 $V(\lambda_k)$ を与えれば補題 1.6 より

$$V(\lambda_k) \subset V^2(\lambda_k) \subset \cdots \subset V^{N_k}(\lambda_k) = W(\lambda_k).$$

また，$V(\lambda_k) \neq \{\mathbf{0}\}$ より $\{\mathbf{0}\} \subset V(\lambda_k)$ を加えてもいい．このとき，$i < N_k$ で $\dim V^i(\lambda_k) < \dim V^{i+1}(\lambda_k)$ となることから，$V^{i+1}(\lambda_k)$ には $V^i(\lambda_k)$ の任意の元と線型独立となるベクトルが存在する．

ここで，以下の定理を与える．

定理 2.3

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の適当な固有値 λ に対する固有空間を $V(\lambda)$ として，$\Delta V_{k+1}(\lambda) = V^{k+1}(\lambda) \setminus V^k(\lambda)$ と定めたとする．$\Delta V_{k+1}(\lambda) \neq \emptyset$ であるとして $\boldsymbol{v}_{k+1} \in \Delta V_{k+1}(\lambda)$ について単位行列を I として

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{v}_k$$

のように定めた $\boldsymbol{v}_k$ は $\Delta V_k(\lambda)$ の元であり，$\boldsymbol{v}_k$ と $\boldsymbol{v}_{k+1}$ は線型独立である．逆に，$\boldsymbol{v}_k \in \Delta V_k(\lambda)$ について，上式を成り立たせる $\boldsymbol{v}_{k+1}$ が存在するならば，それは $\Delta V_{k+1}(\lambda)$ の元である．なお，$V^0(\lambda) = \{\mathbf{0}\}$ とする．

また，$\boldsymbol{v}_{k+1}$ とは別の $\boldsymbol{v}_{k+1}$ と線型独立なベクトル $\boldsymbol{v}'_{k+1} \in \Delta V_{k+1}(\lambda)$ が存在すれば

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v}'_{k+1} = \boldsymbol{v}'_k$$

と定めた $\boldsymbol{v}'_k$ は $\boldsymbol{v}_k$ と線型独立である．

Proof.

数学的帰納法により示す．$k = 1$ のときは $\boldsymbol{v}_2 \in \Delta V_2(\lambda)$ を用いて

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)\boldsymbol{v}_2 =& \boldsymbol{v}_1 \\ (A-\lambda I)^2\boldsymbol{v}_2 =& (A-\lambda I)\boldsymbol{v}_1 \\ \mathbf{0} =& (A-\lambda I)\boldsymbol{v}_1\end{aligned}$$

となることから $\boldsymbol{v}_1 \in \Delta V_1(\lambda)$ となり成り立つ．逆については，$\boldsymbol{v}_2 \in V^1(\lambda)$ ならば $(A-\lambda I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$ となるため $\boldsymbol{v}_2 \notin V^1(\lambda)$ である．また，$\boldsymbol{v}_2 \notin V^2(\lambda)$ ならば

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{v}_1 = (A-\lambda I)^2\boldsymbol{v}_2 \neq \mathbf{0}$$

となり，$\boldsymbol{v}_1 \in \Delta V_1(\lambda)$ の仮定に矛盾するため $\boldsymbol{v}_2 \in \Delta V_2(\lambda)$ である．

k で成り立つことを仮定すれば，$\boldsymbol{v}_{k+1} \in \Delta V_{k+1}(\lambda)$ を用いて

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)\boldsymbol{v}_{k+1} =& \boldsymbol{v}_k \\ (A-\lambda I)^2\boldsymbol{v}_{k+1} =& (A-\lambda I)\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_{k-1}\end{aligned}$$

となることから，帰納法の仮定より $\boldsymbol{v}_k \in \Delta V_k(\lambda)$ となり，$k+1$ でも成り立つ．逆については，$\boldsymbol{v}_{k+1} \in V^k(\lambda)$ ならば $(A-\lambda I)^k\boldsymbol{v}_{k+1} = \mathbf{0}$ であり，

$$(A-\lambda I)^k\boldsymbol{v}_{k+1} = (A-\lambda I)^{k-1}\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$$

となることから $\boldsymbol{v}_k \in V^{k-1}(\lambda)$ となり，$\boldsymbol{v}_k \in \Delta V_k(\lambda)$ の仮定に矛盾するため $\boldsymbol{v}_{k+1} \notin V^k(\lambda)$ である．また，$\boldsymbol{v}_{k+1} \notin V^{k+1}(\lambda)$ ならば

$$(A-\lambda I)^k \boldsymbol{v}_k = (A-\lambda I)^{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} \neq \mathbf{0}$$

となり，$\boldsymbol{v}_k \in \Delta V_k(\lambda)$ の仮定に矛盾するため $\boldsymbol{v}_{k+1} \in \Delta V_{k+1}(\lambda)$ である．また，$\Delta V_{k+1}(\lambda)$ と $V^k(\lambda)$ はその定義より明らかに互いに素であるため，$\boldsymbol{v}_k$ と $\boldsymbol{v}_{k+1}$ は線型独立である．

$\boldsymbol{v}_k$ と $\boldsymbol{v}'_k$ の線型独立性について，$a, a' \in \mathbb{C}$ を用いて

$$a\boldsymbol{v}_k + a'\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$$

とすれば，

$$a(A-\lambda I)^k \boldsymbol{v}_{k+1} + a'(A-\lambda I)^k \boldsymbol{v}'_{k+1} = (A-\lambda I)^k (a\boldsymbol{v}_{k+1} + a'\boldsymbol{v}'_{k+1}) = \mathbf{0}$$

となることから $a\boldsymbol{v}_{k+1} + a'\boldsymbol{v}'_{k+1} \in V^k(\lambda)$ である．また，$\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}'_{k+1} \in \Delta V^{k+1}(\lambda)$ より $\boldsymbol{v}_{k+1}, \boldsymbol{v}'_{k+1} \neq \mathbf{0}$ であるため

$$a\boldsymbol{v}_{k+1} + a'\boldsymbol{v}'_{k+1} = \mathbf{0}$$

となるとは，$\boldsymbol{v}_{k+1}$ と $\boldsymbol{v}'_{k+1}$ の線型独立性から $a, a' = 0$ となることであり，$\boldsymbol{v}_k$ と $\boldsymbol{v}'_k$ は線型独立である．

よって，命題は証明された．

□

この定理より，以下の系が得られる．

系 2.3-1　複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の適当な固有値 λ に対する固有空間を $V(\lambda)$ として，$\Delta V_{k+1}(\lambda) = V^{k+1}(\lambda) \setminus V^k(\lambda) \oplus \{\mathbf{0}\}$ と定めたとする．このとき，$\Delta V_k(\lambda)$ はベクトル空間であり，$i < j$ ならば

$$\dim \Delta V_i(\lambda) \geq \dim \Delta V_j(\lambda).$$

すなわち，$V^1(\lambda), V^2(\lambda), V^3(\lambda), \cdots$ と並べたとき，次元の上昇幅は徐々に小さくなり，それは 0 に収束する．

Proof.

$\mathbb{C}^n$ は有限次元であるため $\Delta V_k(\lambda)$ は $V^{k-1}(\lambda)$ に存在しない $V^k(\lambda)$ の基底をもち，零元 $\mathbf{0}$ をもつためベクトル空間を形成する．$\Delta V_{k+1}(\lambda)$ から $\dim \Delta V_{k+1}(\lambda)$ 本の線型独立なベクトルを選択し，そのベクトルの集合を G_{k+1} とする．定理 2.3 より，G_{k+1} を用いて $\Delta V_k(\lambda)$ で $|G_{k+1}|$ 本の線型独立なベクトルを選択することができる．つまり，これは $\dim \Delta V_{k+1}(\lambda) \leq \dim \Delta V_k(\lambda)$ を意味する．

よって，命題は証明された．

□

この定理により，$W(\lambda_k)$ の m_k 本の線型独立なベクトルの選択する方法が与えられる．そのために，まずは $\Delta V_{k+1}(\lambda_k) = V^{k+1}(\lambda_k) \setminus V^k(\lambda_k)$ とおき，

$$W(\lambda_k) = \{\mathbf{0}\} \oplus \Delta V_1(\lambda_k) \oplus \Delta V_2(\lambda_k) \oplus \cdots \oplus \Delta V_{N_k}(\lambda_k)$$

のような一般固有空間に対する直和分解を与える．このとき，$\Delta V_{M_k}(\lambda_k) \oplus \{\mathbf{0}\}$ の次元を d_{N_k} とおけば

$$d_{M_k} < d_{N_k-1} < \cdots < d_1, \quad m_k = d_1 + d_2 + \cdots + d_{N_k}$$

であり，$\Delta V_{N_k}(\lambda_k)$ から d_{N_k} 本の線型独立なベクトルを選択すれば，連鎖的に $\Delta V_{N_k-1}(\lambda_k), \Delta V_{N_k-2}(\lambda_k), \cdots, \Delta V_1(\lambda_k)$ へと $d_{N_k} \times N_k$ 本の線型独立なベクトルが得られる．

そして，さらに $\Delta V_{N_k-1}(\lambda_k)$ から線型独立なベクトルが選択可能ならば，そのベクトルを用いて $\Delta V_{N_k}(\lambda_k)$ の場合と同様にして，連鎖的に $(N_k-1) \times (d_{N_k} - d_{N_k-1})$ 本の線型独立なベクトルが新たに得られる．このような操作を繰り返すことで，$W(\lambda_k)$ から m_k 本の線型独立なベクトルを選択することができる．ただし，これは線型独立なベクトルを得るための手段の 1 つに過ぎない．

ここで，連鎖的に線型独立なベクトルを得る方法について以下の定義を与える．

定義 2.2

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ の適当な固有値 λ に対する一般固有空間 $W(\lambda)$ の任意の元 $\boldsymbol{v}_1$ に対して単位行列を I として

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda I)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2\\
&(A-\lambda I)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_3\\
&\vdots\\
&(A-\lambda I)\boldsymbol{v}_{m-1} = \boldsymbol{v}_m\\
&(A-\lambda I)\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

のように与えられたベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ は線型独立なベクトルの集合であり，これを**ジョルダン鎖 (Jordan chain)** という．また，m をジョルダン鎖の長さという．

ここで，ジョルダン鎖の長さとその本数に関する定理を与える．

定理 2.4

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ のそれぞれ異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ に対する一般固有空間 $W(\lambda_k)$ により生成される長さ $l > 0$ のジョルダン鎖の本数 m_l は，単位行列を I として

$$m_l = \mathrm{rank}\,(A-\lambda_k I)^{l+1} - 2\mathrm{rank}\,(A-\lambda_k I)^{l} + \mathrm{rank}\,(A-\lambda_k I)^{l-1}$$

で与えられ，最大長さは

$$\begin{cases}(A-\lambda_k I)^{l_{\max}} = (A-\lambda_k I)^{l_{\max}+1}\\ (A-\lambda_k I)^{l_{\max}} \neq (A-\lambda_k I)^{l_{\max}-1}\end{cases}$$

を満たす $l_{\max}$ に等しい．

Proof.

最大長さについて，最小多項式 $\varphi_A(x) \in \mathbb{C}[x]$ を $N_1, N_2, \cdots, N_r \in \mathbb{N}$ を用いて

$$\varphi_A(x) = (x-\lambda_1)^{N_1}(x-\lambda_2)^{N_2}\cdots(x-\lambda_r)^{N_r}$$

としたとき，λ_k に対する固有空間を $V(\lambda_k)$ とすれば N_k は補題 1.6 より $V^i(\lambda_k) = W(\lambda_k)$ を満たす最小の i である．つまり，

$$\begin{cases}(A-\lambda_k I)^{N_k} = (A-\lambda_k I)^{N_k+1}\\ (A-\lambda_k I)^{N_k} \neq (A-\lambda_k I)^{N_k-1}\end{cases}$$

を満たし，$\boldsymbol{v}_{k,N_k} \in V^{N_k}(\lambda_k) \setminus V^{N_k-1}(\lambda_k)$ を与えれば，定理 2.3 より

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda_k I)\boldsymbol{v}_{k,N_k} = \boldsymbol{v}_{k,N_k-1}\\
&(A-\lambda_k I)\boldsymbol{v}_{k,N_k-1} = (A-\lambda_k I)^2\boldsymbol{v}_{k,N_k} = \boldsymbol{v}_{k,N_k-2}\\
&\vdots\\
&(A-\lambda_k I)\boldsymbol{v}_{k,1} = (A-\lambda_k I)^{N_k}\boldsymbol{v}_{k,N_k} = \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

のように長さ N_k のジョルダン鎖が得られる．このとき，任意の $\boldsymbol{v}_k \in W(\lambda_k)$ で $(A-\lambda_k I)^{N_k}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$ となることから，長さ N_k が $W(\lambda_k)$ に対するジョルダン鎖の最大長さである．

次に，ジョルダン鎖の長さに対する本数について示す．長さ l のときのジョルダン鎖の本数 m_l は

$$m_l = \dim V^l(\lambda_k) - \dim V^{l-1}(\lambda_k) - (m_{N_k} + m_{N_k-1} + \cdots + m_{l+1})$$

となるが，長さ $l+1$ のときについて

$$\begin{aligned}
m_{l+1} &= \dim V^{l+1}(\lambda_k) - \dim V^l(\lambda_k) - (m_{N_k} + m_{N_k-1} + \cdots + m_{l+2})\\
m_{N_k} + m_{N_k-1} + \cdots + m_{l+2} + m_{l+1} &= \dim V^{l+1}(\lambda_k) - \dim V^l(\lambda_k)
\end{aligned}$$

となるため，これを代入することで

$$m_l = 2\dim V^l(\lambda_k) - \dim V^{l-1}(\lambda_k) - \dim V^{l+1}(\lambda_k)$$

となる．ここで，次元定理より $\dim V^l(\lambda_k) = n - \mathrm{rank}\,(A-\lambda_k I)^l$ となることを用いることで

$$\begin{aligned} m_l =& 2(n - \mathrm{rank}\,(A-\lambda_k I)^l) - (n - \mathrm{rank}\,(A-\lambda_k I)^{l-1}) - (n - \mathrm{rank}\,(A-\lambda_k I)^{l+1}) \\ =& \mathrm{rank}\,(A-\lambda_k I)^{l+1} - 2\mathrm{rank}\,(A-\lambda_k I)^l + \mathrm{rank}\,(A-\lambda_k I)^{l-1}. \end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

A に対してもジョルダン鎖の概念を適用するために $\Delta V_{k+1}(\lambda_k) = V^{k+1}(\lambda_k) \setminus V^k(\lambda_k)$ を定義する．ジョルダン鎖の概念を用いることで，$W(\lambda_k)$ から m_k 本の線型独立なベクトルを選択する方法の 1 つとして，複数のジョルダン鎖によるベクトルとそれらと線型独立な $\Delta V_1(\lambda_k)$ に存在するベクトルにより m_k 本の線型独立なベクトルを構成すると表現することができる．また，$\Delta V_1(\lambda_k)$ に存在するということは $\boldsymbol{v}_{i,j} \in \Delta V_1(\lambda_i)$ で

$$(A - \lambda_i I)\boldsymbol{v}_{i,j} = \boldsymbol{0}$$

となり，長さ 1 のジョルダン鎖とも考えることができる．$W(\lambda_k)$ の 1 つのジョルダン鎖 $\{\boldsymbol{v}_{k,1}, \boldsymbol{v}_{k,2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{k,m}\}$ に対して A を作用させると

$$\begin{cases} A\boldsymbol{v}_{k,1} = \lambda_k \boldsymbol{v}_{k,1} + \boldsymbol{v}_{k,2} \\ A\boldsymbol{v}_{k,2} = \lambda_k \boldsymbol{v}_{k,2} + \boldsymbol{v}_{k,3} \\ \vdots \\ A\boldsymbol{v}_{k,m} = \lambda_k \boldsymbol{v}_{k,m} \end{cases}$$

となり，半単純成分 ϕ と冪零成分 ψ に対する対応

$$\begin{cases} \phi\boldsymbol{v}_{k,1} = \lambda_k \boldsymbol{v}_{k,1} \\ \phi\boldsymbol{v}_{k,2} = \lambda_k \boldsymbol{v}_{k,2} \\ \vdots \\ \phi\boldsymbol{v}_{k,m} = \lambda_k \boldsymbol{v}_{k,m} \end{cases} + \begin{cases} \psi\boldsymbol{v}_{k,1} = \boldsymbol{v}_{k,2} \\ \psi\boldsymbol{v}_{k,2} = \boldsymbol{v}_{k,3} \\ \vdots \\ \psi\boldsymbol{v}_{k,m} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

というように単純化をすることができ，P を構成する基底をジョルダン鎖にすることで $A_1, A_2, \cdots, A_r$ の構造を最も単純化することができるということがわかる．

この考えを元にすることで，以下の定理が与えられる．

定理 2.5

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次の正方行列 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ のそれぞれ異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ に対して l 次の正方行列 $J(\lambda_k, l)$ を

$$J(\lambda_k, n) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_k & 1 \\ 0 & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

を定めたとき，$l_1 + l_2 + \cdots + l_s = n$ として

$$P^{-1}AP = \underbrace{J(\lambda_1, l_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_r, l_s)}_{s\text{ 個}} = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, l_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_r, l_s) \end{pmatrix}$$

を満たす n 次の正方行列 P が存在する．このとき，$J(\lambda_k, l)$ を**ジョルダン細胞 (Jordan cells)** もしくは**ジョルダンブロック (Jordan block)** といい，$P^{-1}AP$ を A の**ジョルダン標準形 (Jordan normal form)** という．また，ジョルダン標準形はジョルダンブロックの並べ方を除けば一意に存在する．

Proof.

λ_k に対する一般固有空間を $W(\lambda_k)$ として，その次元を m_k とする．P は $W(\lambda_k)$ の全ての基底により構成されるため，その基底の選択方法について示す．このとき，$W(\lambda_k)$ の基底の選択方法として，長さ 1 のジョルダン鎖を許容することで，定理 2.3 およびその系より，c_k 本のジョルダン鎖により m_k 本の $W(\lambda_k)$ の基底を選択することができる．

また，$W(\lambda_k)$ の t 番目のジョルダン鎖を長さ $l_{k,t}$ として

$$J_{k,t} = \{\boldsymbol{v}_{k,t,1}, \boldsymbol{v}_{k,t,2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{k,t,l_{k,t}}\}$$

とあらわせば，全ての一般固有空間 $W(\lambda_1), W(\lambda_2), \cdots, W(\lambda_r)$ のそれぞれジョルダン鎖のベクトルは定理 2.3 より線型独立であることから，ジョルダン鎖による構成されるベクトル空間は互いに素，すなわち k', t' を与えたとき $k \neq k'$ と $t \neq t'$ のいずれかを満たすとしたとき

$$\mathrm{span}\,(J_{k,t}) \cap \mathrm{span}\,(J_{k',t'}) = \{\boldsymbol{0}\}.$$

つまり，全てのジョルダン鎖の直和集合を考えることができ，その構成は

$$\mathrm{span}\,(J_{k,1} \oplus J_{k,2} \oplus \cdots \oplus J_{k,c_k}) = W(\lambda_k)$$

となることから

$$\mathrm{span}\,(\underbrace{J_{1,1} \oplus \cdots \oplus J_{1,c_1} \oplus \cdots \oplus J_{r,1} \oplus \cdots \oplus J_{r,c_r}}_{s\ 個}) = \mathbb{C}^n.$$

また，ジョルダン鎖の定義より $\boldsymbol{v}_{k,t,1}, \boldsymbol{v}_{k,t,2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{k,t,l_{k,t}} \in J_{k,t}$ で

$$\begin{cases} A\boldsymbol{v}_{k,t,1} = \lambda_k \boldsymbol{v}_{k,t,1} + \boldsymbol{v}_{k,t,2} \\ A\boldsymbol{v}_{k,t,2} = \lambda_k \boldsymbol{v}_{k,t,2} + \boldsymbol{v}_{k,t,3} \\ \vdots \\ A\boldsymbol{v}_{k,t,l_{k,t}} = \lambda_k \boldsymbol{v}_{k,t,l_{k,t}} \end{cases}$$

となることを用いることで，零行列 O を用いて

$$\begin{aligned}
A\underbrace{\begin{pmatrix} J_{k,t} & O \end{pmatrix}}_{n\ 列} &= A\underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{k,t,1}, \boldsymbol{v}_{k,t,2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{k,t,l_{k,t}} & O \end{pmatrix}}_{n\ 列} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} A\boldsymbol{v}_{k,t,1} & A\boldsymbol{v}_{k,t,2} & \cdots & A\boldsymbol{v}_{k,t,l_{k,t}} & O \end{pmatrix}}_{n\ 列} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{k,t,1}, \boldsymbol{v}_{k,t,2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{k,t,l_{k,t}} & O \end{pmatrix}}_{n\ 列}
\underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda_k & 1 & & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_k & 1 \\ 0 & & & & \lambda_k \end{matrix}}^{l_{k,t} \times l_{k,t} 行列} & O \\ O & O \end{pmatrix}}_{n \times n\ 行列} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} J_{k,t} & O \end{pmatrix}}_{n\ 列} \underbrace{\begin{pmatrix} J(\lambda_k, l_{k,t}) & O \\ O & O \end{pmatrix}}_{n \times n\ 行列}
\end{aligned}$$

といった形式的な表現をすることができる．つまり，

$$P = \begin{pmatrix} J_{1,1} & \cdots & J_{1,c_1} & \cdots & J_{r,1} & \cdots & J_{r,c_r} \end{pmatrix}$$

とすることで

$$
\begin{aligned}
AP =& P\begin{pmatrix}
J(\lambda_1, l_{1,1}) & & & & & & 0 \\
& \ddots & & & & & \\
& & J(\lambda_1, l_{1,c_1}) & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & J(\lambda_r, l_{r,1}) & & \\
& & & & & \ddots & \\
0 & & & & & & J(\lambda_r, l_{r,c_r})
\end{pmatrix} \\
=& P(J(\lambda_1, l_{1,1}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_1, l_{1,c_1}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_r, l_{r,1}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_r, l_{r,c_r})).
\end{aligned}
$$

次に，一意性について示す．このとき，ジョルダン標準形が基底の選択方法に依存するのではなく，A の取り方によって決まるということを示せばいい．ジョルダンブロックの大きさはジョルダン鎖の長さであり，ジョルダンブロックの大きさに対する個数，すなわちジョルダン鎖の長さに対する本数は定理 2.4 より A に関する階数により与えられることから基底の選択方法に依存しない．

よって，命題は証明された．

□