複素解析 -基礎論-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2018 年 10 月 5 日
最終更新 2019 年 5 月 4 日

目次

第 1 章

複素関数

1.1 複素数の定義

定義 1.

実数体 $\mathbb{R}$ 上で 1 と線型独立な i と任意の $x, y \in \mathbb{R}$ による線型結合 $z = x + yi$ を与えたとき，$i^2 = -1$ が成り立つならば z を**複素数**といい，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ とあらわすし，i を**虚数**という．これは複素数は自然に積が定義されることを示す．また，x と y をそれぞれ**実部**，**虚部**といい，

$$x = \operatorname{Re} z \quad y = \operatorname{Im} z$$

とあらわされる．特に，虚部のみから構成される複素数を**純虚数**という．

複素数は座標平面上で横軸を実部，縦軸を虚部であらわした座標平面上の点としてあらわすこともでき，このような座標平面を**複素数平面**もしくは**ガウス平面**といい，それぞれの軸を**実軸**および**虚軸**という．また，$z \in \mathbb{C}$ において虚部の符号のみがことなるものを**共役複素数**といい，$\bar{z}$ もしくは z^* とあらわす．

ここで，複素数に関する最も基本的な性質を与える．

複素数の代数的構造

複素数の集合 $\mathbb{C}$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ を構成する．また，複素数における乗法は双線型であり，可換体である．

Proof.

1 と i の線型独立性と $\mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$ 上で構成されることにより，$\mathbb{C}$ がベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ を構成する．

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ が任意の $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ によって $z_i = x_i + y_i i$ とあらわされるとする．このとき，線型性より

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 =& (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \\
=& x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 i x_2 + y_1 y_2 i^2 \\
=& x_2 x_1 + y_2 i x_1 + x_2 y_1 i + y_2 y_1 i^2 \\
=& (x_2 + y_2 i)(x_1 + y_1 i) \\
=& z_2 z_1
\end{aligned}$$

となり，複素数の積に関して $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ および交換法則が成り立つ．同様にして，

$$\begin{aligned}
z_1(z_2 + z_3) =& (x_1 + y_1 i)((x_2 + y_2 i) + (x_3 + y_3 i)) \\
=& (x_1 + y_1 i)((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3) i) \\
=& (x_1 + y_1 i)(x_2 + x_3) + (x_1 + y_1 i)(y_2 + y_3) i \\
=& (x_1 + y_1 i) x_2 + (x_1 + y_1 i) x_3 + (x_1 + y_1 i) y_2 i + (x_1 + y_1 i) y_3 i \\
=& (x_1 + y_1 i) x_2 + (x_1 + y_1 i) y_2 i + (x_1 + y_1 i) x_3 + (x_1 + y_1 i) y_3 i \\
=& (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) + (x_1 + y_1 i)(x_3 + y_3 i) \\
=& z_1 z_2 + z_1 z_3
\end{aligned}$$

となり，複素数の積の分配法則が成り立つ．また，$1 \in \mathbb{C}$ によって

$$z_1 \cdot 1 = (x_1 + y_1 i) \cdot 1 = 1 \cdot (x_1 + y_1 i) = (x_1 + y_1 i) = z_1$$

となることから 1 は $\mathbb{C}$ の乗法単位元であり，$\mathbb{C}$ が乗法に対してモノイドであることが示される．

$0 \in \mathbb{C}$ は自明な乗法吸収元であることから $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ における $z_1 z = 1$ を満たす $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ は，

$$\begin{aligned}
z_1 z =& 1 \\
z =& \frac{1}{x_1 + y_1 i} \\
z =& \frac{x_1 - y_1 i}{(x_1 + y_1 i)(x_1 - y_1 i)} \\
z =& \frac{x_1 - y_1 i}{x_1^2 + y_1^2}
\end{aligned}$$

となり，$z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ であることから $x_1^2 + y_1^2 > 0$ であるため $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は常に乗法逆元をもつ．つまり，$\mathbb{C}$ がモノイドであり $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ は乗法についてアーベル群となることから $\mathbb{C}$ は可換体である．

よって，命題は証明された．

□

補題 1.　$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ について，以下の性質が成り立つ．

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

Proof.

任意の $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ を用いて $z_1 = x_1 + y_1 i$ および $z_2 = x_2 + y_2 i$ となることを用いて証明をする．

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2)^* =& ((x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i))^* \\
=& ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i)^* \\
=& (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) i \\
=& (x_1 - y_2 i) + (x_1 - y_2 i) \\
=& z_1^* + z_2^* \\
(z_1 z_2)^* =& ((x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i))^* \\
=& ((x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i) \\
=& (x_1 x_2 - y_1 y_2) - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \\
=& x_1 (x_2 - y_2 i) - y_1 i (-y_2 i + x_2) \\
=& (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) \\
=& z_1^* z_2^*
\end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

また，この補題は $\mathbb{C}$ が可換体であることより減算や除算でも同様のことが成り立つ．

$\mathbb{C}$ をベクトル空間として扱えば，任意の $z \in \mathbb{C}$ は $x, y \in \mathbb{R}$ によって位置ベクトル (x, y) として扱うことができる．一般に，座標は極座標であらわすことができ，角度 θ と $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ によって

$$(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta)$$

とあらわすことができる．これを $x + yi$ の形式の対応を与えることで，以下の定義を与えることができる．

定義 2.

$z \in \mathbb{C}$ が $x, y \in \mathbb{R}$ によって $z = x + yi$ とあらわされるとする．このとき，

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

を z の**絶対値**といい，$|z|$ とあらわし，これは $\sqrt{z^* z}$ に等しいことがわかる．また，複素数平面における極座標の角度 θ を z の**偏角**といい，$\arg z$ とあらわす．このとき，z は

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とあらわすことができ，これを**極形式**という．

オイラーの公式

$z \in \mathbb{C}$ で $r = |z|$，偏角を θ としたとき，

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

が成り立つ．これを**オイラーの公式**という．

Proof.

指数関数と三角関数をそれぞれ 0 を中心にテイラー展開すれば，

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta i)^k}{k!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

となる．次に，この式の整合性を確かめる．級数の順序を入れ替える操作が可能な条件は絶対収束することであるため，ダランベールの収束判定法より，

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(\theta i)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{(\theta i)^k}{k!}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\theta}{k+1} = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{m+1}}{(2(m+1))!}\theta^{2(m+1)}}{\frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m}} \right| = \lim_{m\to\infty} \frac{\theta^2}{(2m+2)(2m+1)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!}\theta^{2(n+1)+1}}{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0$$

となり，収束半径が全域となるため式の整合性が得られた．なお，暗黙的に θ が有限であることを用いている．

よって，命題は証明された．

□

この定理より，ただちに以下の系が導かれる．

系 1.　$\theta \in \mathbb{C}$ と $n \in \mathbb{Z}$ において，以下の関係式が成り立つ．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

これを**ド・モアブルの公式**という．

Proof.

オイラーの公式より自明である．

□

系 2.　$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ について以下の関係式が成り立つ．

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

なお，偏角の周期性は無視するとする．

Proof.

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ および $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ とすれば，

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

となる．この極形式における複素数の絶対値と偏角を比較することにより等式が得られる．

よって，命題は証明された．

□

絶対値の定義と $\mathbb{C}$ をベクトル空間として扱うことにより，$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ において三角不等式

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

を満たすことは自明である．

1.2　複素関数

複素数における関数は実数における関数と同様にして定義を与えることができる．

定義 3.

$\mathbb{C}$ の部分集合 $D \subseteq \mathbb{C}$ において，$z \in D$ を $w \in \mathbb{C}$ へ対応させる写像 $f : D \to \mathbb{C}$ が与えられたとき，f を**複素関数**といい，$w = f(z)$ とあらわされる．

また，D を f の定義域といい，z を表示する複素数平面を z **平面**，w を表示する複素数平面を w **平面**という．D の部分集合 $D' \subseteq D$ で f が z について解けるとして，その解を複素関数 $z = g(w)$ でおいたとき，g を D' における f の**逆関数**といい f^{-1} とあらわす．

複素関数の例として，$w = \frac{1}{z-1}$ を定義すれば $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ を定義域とすることができる．以下では，$\mathbb{R}$ における初等関数の複素数における定義を与える．

定義 4.

$z \in \mathbb{C}$ が $x, y \in \mathbb{R}$ によって $z = x + yi$ とあらわされるとき，指数関数 $w = e^z$ は

$$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

とあらわされる．また，三角関数の周期性より，$n \in \mathbb{Z}$ で

$$e^{z+2\pi ni} = e^x(\cos(y + 2\pi n) + i \sin(y + 2\pi n)) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

となる．つまり，指数関数は周期 $2\pi i$ の周期関数である．

$z \in \mathbb{C}$ は $x, y \in \mathbb{R}$ により $z = x + yi$ とあらわされるとする．オイラーの公式より，

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

となるため，これを連立して $\cos x$ と $\sin x$ について解けば，

$$
\begin{aligned}
\sin x =& \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\
\cos x =& \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}
\end{aligned}
$$

となる．これと同様のことを z で考えれば，

$$
\begin{aligned}
e^{iz} =& e^{ix}e^{-y} \\
=& e^{-y}(\cos x + i\sin x) \\
=& \frac{e^{ix-y} + e^{-ix-y}}{2} + i\frac{e^{ix-y} - e^{-ix-y}}{2i} \\
=& \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
=& \cos z + i\sin z
\end{aligned}
$$

となるため，オイラーの公式は偏角が複素数の場合でも成り立つ．よって，以下の定義が与えられる．

定義 5.

$z \in \mathbb{C}$ における三角関数は

$$
\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}
$$

と定義される．また，これらは指数関数の周期性より周期 2π の周期関数である．

対数関数は指数関数の逆関数として定義されている．$z \in \mathbb{C}$ で指数関数は $w = e^z$ と定義されるが，これの役割を交換して $z = e^w$ とあらわしたとする．$u, v \in \mathbb{R}$ によって $w = u + vi$ とあらわすとすれば，

$$
z = e^{u+vi} = e^u e^{vi}
$$

となることから $|z| = e^u$ および $\arg z = v$ が成り立つ．よって，$u = \log|z|$ および $v = \arg z$ であるため

$$
w = \log|z| + i\arg z.
$$

このことにより，以下の定義が与えられる．

定義 6.

$z \in \mathbb{C}$ における対数関数は

$$
\log z = \log|z| + i\arg z
$$

と定義される．また，$\arg z$ は $2\pi i$ の周期性をもつことから複素数において対数関数は厳密には関数ではなく，無限多価関数である．このとき，関数となるように定義域を制限して 1 価関数としたものを**主値**といい，特に対数関数では $\arg z$ に対して $(-\pi, \pi]$ として関数としたものを $\mathrm{Log}\, z$ とあらわす．一般に，実数における対数関数とは違い，複素数の対数関数の主値における演算法則は $\arg z$ を制限していることから成り立たない．

また，対数関数の主値を用いることで多価性を $n \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$
\log z = \mathrm{Log}\, z + 2\pi ni
$$

とあらわすことができる．

一般の冪関数の指数法則

$\alpha, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ において，$\alpha \neq e$ としたとき指数部の演算の結合に関する指数法則

$$
\begin{aligned}
\alpha^{z_1+z_2} =& \alpha^{z_1}\alpha^{z_2} \\
(\alpha^{z_1})^{z_2} =& \alpha^{z_1 z_2}
\end{aligned}
$$

は一般に成り立たない．

Proof.

まずは，第 1 式の両辺を確認する．なお，$m, n \in \mathbb{Z}$ である．

$$\begin{aligned}\alpha^{z_1+z_2} =& e^{(z_1+z_2)\log\alpha} \\ =& e^{(z_1+z_2)(\mathrm{Log}\,\alpha+2\pi mi)} \\ \alpha^{z_1}\alpha^{z_2} =& e^{z_1\log\alpha}e^{z_2\log\alpha} \\ =& e^{z_1(\mathrm{Log}\,\alpha+2\pi mi)}e^{z_2(\mathrm{Log}\,\alpha+2\pi ni)} \\ =& e^{(z_1+z_2)\mathrm{Log}\,\alpha+2\pi(m+n)i}\end{aligned}$$

同様にして第 2 式の両辺を確認する．そのために $z \in \mathbb{C}$ による冪関数の対数を示す．なお，$x, y \in \mathbb{R}$ で $z = x + yi$ とする．

$$\begin{aligned}\log\alpha^z =& \log e^{z\log\alpha} \\ =& \log e^{(x+yi)(\log|z|+i\arg\alpha)} \\ =& \log e^{(x\log|\alpha|-y\arg\alpha)+i(y\log|\alpha|+x\arg\alpha)} \\ =& (x\log|\alpha| - y\arg\alpha) + i(y\log|\alpha| + x\arg\alpha + 2\pi n) \\ =& (x+yi)\log|\alpha| + i(x+yi)\arg\alpha + 2\pi ni \\ =& z\log\alpha + 2\pi ni\end{aligned}$$

これを用いて第 2 式は以下のようになる．

$$\begin{aligned}(\alpha^{z_1})^{z_2} =& e^{z_2\log\alpha^{z1}} \\ =& e^{z_2(z_1\log\alpha+2\pi ni)} \\ =& e^{z_2z_1\log\alpha}e^{z_22\pi ni} \\ \alpha^{z_1z_2} =& e^{z_1z_2\log\alpha}\end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

1.3　正則関数

複素数の極限も実数における極限と同様にしてイプシロンデルタ論法によって定義することができる．一般に $\mathbb{R}$ で極限を議論できる集合というのは開区間となることから，これを拡張して複素数の極限を議論するための定義を与える．

定義 7.

$\mathbb{C}$ の部分集合 $D \subseteq \mathbb{C}$ が単連結開部分集合であるとき，D を**領域**という．$z \in D$ による複素関数 $w = f(z)$ で，$z \to a \in D$ のとき

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ s.t.\ \forall z \in D, |z-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z)-b| < \varepsilon$$

となる b を $z \to a$ としたときの $f(z)$ の**極限値**という．特に，$f(a) = b$ となるとき $f(z)$ は a で**連続**であるという．

これより，複素関数の導関数の定義が与えられる．

定義 8.

領域 D で定義される $z \in \mathbb{C}$ による複素関数 $f(z)$ について，$a \in D$ で

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(a+\Delta z)-f(\Delta z)}{\Delta z}$$

が存在するとき，$f(z)$ は a で**微分可能**であるという．また，この極限を $f(a)$ における**微分係数**といい $f'(a)$ とあらわす．

$f(z)$ が $D' \subseteq D$ の任意の点で微分可能であるとき，$f(z)$ は D' で**正則**であるといい，$f(z)$ を D' における**正則関数**という．また，正則関数の逆写像が存在して，逆写像をも正則であるとき $f(z)$ は**双正則**であるという．任意の $z \in D'$ における微分係数を $f'(z)$ とあらわせば，$f'(z)$ は D' における関数となり，$f'(z)$ を $f(z)$ の**導関数**といい，$f'(z)$ を求める操作を $f(z)$ を**微分する**という．

これらの表記は実数における微分と同様である．

$z \in \mathbb{C}$ による複素関数 $f(z)$ を与えたとき，これの微分係数は微小な $\Delta z \in \mathbb{C}$ だけ変化を与えたときの変化量を Δz で割合を取るといったものである．$x \in \mathbb{R}$ で $f(x)$ を考えれば，Δz は $\Delta z \to +0$ と $\Delta z \to -0$ が一致するとき微分係数が存在するということになるが，$f(z)$ で考えれば複素数平面上のあらゆる方向から $\Delta z \to 0$ をとる方法が存在するためこのまま考えることは困難である．

そこで，以下の定理を与えることによって複素関数と実関数との導関数の関係を得る．

コーシー・リーマンの関係式

$z \in \mathbb{C}$ による複素関数 $w = f(z)$ が領域 D で正則となる必要十分条件は，$x, y \in \mathbb{R}$ によって $z = x + yi$ および $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とあらわされるとすれば，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つことである．また，偏微分を添え字を用いてあらわすとすれば，

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

が成り立つ．これを**コーシー・リーマンの関係式**という．なお，u と v は C^1 級の関数であるとする．

Proof.

まずは，必要性を示す．

$\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$ によって $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ とあらわされるとして D で導関数が存在するならば

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

の極限は $\Delta z \to 0$ の方法によらず常に一定でなければならない．$\Delta y = 0$ としたとき $f'(z)$ は

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x)-f(z)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y)-u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y)-v(x,y)}{\Delta x} \\
&= u_x + iv_x
\end{aligned}$$

となり，同様にして $\Delta x = 0$ としたとき $f'(z)$ は

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z+i\Delta y)-f(z)}{i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y} \\
&= -iu_x + v_x
\end{aligned}$$

となり，これらが一致しなければならないことから必要性は示された．

次に，十分性を示す．

u と v は仮定より全微分が可能であるため $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を用いることにより

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \varepsilon_1 \quad \Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \varepsilon_2$$

が成り立つ．よって，$f(z)$ の全微分は

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = (u_x + iv_x)\Delta x + i(u_y + iv_y)\Delta y + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2) = (u_x + iv_x)\Delta z + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)$$

となる．また，$\Delta z \to 0$ で $\frac{\varepsilon_1 + i\varepsilon_2}{\Delta z} \to 0$ となることから

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = u_x + iv_x$$

となり十分性が示された．

よって，命題は証明された．

□

コーシー・リーマンの関係式の仮定より $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ の u と v は C^1 級の関数であるが，C^2 であるとすれば

$$u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_x)_y = (v_y)_x + (-v_x)_y = 0$$

となり，u はラプラス方程式を満足する．これは v も同様である．つまり，u と v が C^2 級の関数であれば u と v は調和関数であるということである．

また，実関数における積の微分法や連鎖律は正則関数についてならば自然に複素数へと拡張される．コーシー・リーマンの関係式を用いることで正則関数の判定およびその導関数を与える．

正則な初等関数の導関数

$z \in \mathbb{C}$ についての複素関数について以下の性質が成り立つ．

(1) 指数関数の導関数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z = e^z$$

(2) 三角関数の導関数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin z = \cos z \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cos z = -\sin z$$

(3) 正則関数 $f(z)$ の複素共役による導関数

$$\frac{\partial}{\partial z^*} f(z) = 0$$

Proof.

$x, y \in \mathbb{R}$ によって $z = x + yi$ とあらわすことにより各々の証明を与える．

(1) はコーシー・リーマンの関係式より $u = e^x \cos y$ および $v = e^x \sin y$ とおき，

$$u_x = e^x \cos y = v_y \quad v_x = e^x \sin y = -u_y$$

となることから e^z は全域で正則であり，導関数は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^z = e^x \cos y + e^x \sin y = e^x e^{iy} = e^z$$

となる．

(2) は三角関数の定義より，全域で正則であり，導関数は

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sin z &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \cos z \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cos z &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\sin z
\end{aligned}$$

となる．

(3) は

$$x = \frac{z+z^*}{2} \quad y = \frac{z-z^*}{2i}$$

となることを用いて，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z^*}f(z) =& \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z^*} \\ =& (u_x + iv_x)\cdot\frac{1}{2} + (u_y + iv_y)\cdot\left(-\frac{1}{2i}\right) \\ =& \frac{1}{2}((u_x - v_y) + i(v_x + u_y)) \\ =& 0\end{aligned}$$

となる．

よって，命題は証明された．

□

次に，逆関数の存在に関する定理を与える．

複素関数における逆写像定理

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $f(z)$ について，$x, y \in \mathbb{R}$ によって $z = x + yi$ とあらわされ，C^1 級の関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ によって $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とあらわされるとする．

$|f'(z)| \neq 0$ であるとき f の逆関数 f^{-1} が存在する．

Proof.

$f(z) = f(x,y)$ といった 2 変数関数とみなすことで逆写像定理を適用することができる．このとき，ヤコビ行列が正則になればいいためヤコビアンを確認する．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ iv_x & iv_y \end{vmatrix} \neq& 0 \\ u_x v_y - u_y v_x \neq& 0 \\ u_x^2 + v_x^2 \neq& 0\end{aligned}$$

コーシー・リーマンの関係式より $f'(z) = u_x + iv_x$ となるため，ヤコビアンの条件式は $|f'(z)| \neq 0$ に等しい．

よって，命題は証明された．

□

また，複素関数の逆関数の導関数について以下の定理が与えられる．

逆関数の導関数

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $w = f(z)$ について，f の逆関数 $z = f^{-1}(w)$ の導関数は

$$(f^{-1}(w))' = \frac{1}{f'(z)}$$

となる．

Proof.

$f(z)$ は正則であることから，$x, y \in \mathbb{R}$ によって $z = x + yi$ として C^1 級関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ で $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とあらわされるとすれば，ヤコビ行列によって単位行列を I とすれば正則条件より

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = I \;\Leftrightarrow\; J^{-1}J = I$$

が成り立つ．また，J^{-1} を直接計算すると，

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \frac{1}{|J|}\begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

となり，これの各成分をコーシー・リーマンの関係式によって比較をすると，

$$\begin{aligned} x_u =& \frac{1}{|J|}v_y = \frac{1}{|J|}u_x = y_v \\ x_v =& -\frac{1}{|J|}u_y = \frac{1}{|J|}v_x = -y_u \end{aligned}$$

となり，これはちょうど $x(u,v), y(u,v)$ としたときのコーシー・リーマンの関係式といえる．よって，$z = x(x,y) + iy(u,v)$ とおくことができ，これは領域 $\mathrm{Im}\, f$ での w の正則関数となる．ヤコビ行列の正則性より f は逆関数 f^{-1} が存在し，$z = (f^{-1} \circ f)(z)$ および $w = (f \circ f^{-1})(w)$ となる．

これより，$z = f^{-1}(w)$ の導関数は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} =& x_u + iy_u \\ =& \frac{1}{|J|}(v_y - iv_x) \\ =& \frac{u_x - iv_x}{u_x^2 + v_x^2} \\ =& \frac{1}{u_x + iv_x} \\ =& \frac{1}{f'(z)} \end{aligned}$$

となる．

よって，命題は証明された．

□