複素解析 -複素積分-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

初回更新 2018 年 10 月 5 日
最終更新 2019 年 1 月 22 日

目次

第 1 章

複素積分

1.1 複素積分の定義

定義 1.

$\mathbb{R}$ 上の区間 $[a, b]$ で定義される変数 t による $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$ での $\mathbb{C}$ 上の曲線 $z(t) = x(t) + iy(t)$ で t が a から b まで動くとき，この $z(a)$ から $z(b)$ までの軌跡の曲線を C とする．また，b から a まで動くときの軌跡をの曲線を $-C$ とする．

このとき，$\mathbb{R}$ における線積分と同様にして $\mathbb{C}$ 上で線積分を考えることができ，

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

とあらわされる．これを $f(z)$ の曲線 C に沿う**複素積分**といい，C を**積分路**という．ただし，これは積分値が収束する，つまり $u(t), v(t) \in \mathbb{R}$ で $w(t) = u(t) + iv(t)$ に対して

$$\int_a^b w(t)\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$$

の関係式が成り立たなければならない．また，$z(a) = z(b)$ であるとき複素積分は周回積分となり，

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

とあらわされる．また，複素積分は実部と虚部に分解することが可能であることから $\mathbb{R}$ における性質を満たす．

また，複素積分の絶対値の基本的な評価について以下の定理が成り立つ．

複素積分の絶対評価

$z \in \mathbb{C}$ による複素関数 $f(z)$ が $\mathbb{R}$ 上の区間 $[a, b]$ で定義される変数 t による曲線 $C : z = z(t)$ で連続であるとき，

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_a^b \left|f(z(t))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t$$

が成り立つ．

Proof.

三角不等式より，積分値が収束するならばただちに以下の関係式が成り立つ．

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_a^b |f(z)\mathrm{d}z| = \int_a^b \left|f(z(t))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t$$

よって，命題は証明された．

□

定義 2.

$z \in \mathbb{C}$ による複素関数 $f(z)$ が領域 D で連続で，D で $F'(z) = f(z)$ を満たす正則関数 $F(z)$ が存在するとき，$F(z)$ を $f(z)$ の不定積分という．実際，$\mathbb{R}$ 上の区間 $[a, b]$ で定義される変数 t による曲線 $C : z = z(t)$ が与えられれば，連鎖律より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(z(t)) = F'(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t)$$

となり，

$$\int_a^b f(z(t))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(z(t))\mathrm{d}t = [F(z(t))]_a^b$$

が成り立つため，$\mathbb{R}$ における不定積分の一般化として $\mathbb{C}$ における不定積分が定義される．

1.2　周回積分

$z \in \mathbb{C}$ による複素関数 $f(z)$ が任意の曲線 C による周回積分は，$f(z)$ が不定積分をもつならば始点と終点によって積分値は決まるため

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

が成り立つ．ここで，不定積分が存在する条件に関する以下の定理を与える．

コーシーの積分定理

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $f(z)$ で D 内に存在する任意の単純閉曲線 C について，

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

が成り立つ．これを**コーシーの積分定理**という．

Proof.

$x, y \in \mathbb{R}$ によって $z = x + yi$ とあらわされ，C^1 級の関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ によって $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とあらわされるとすれば，グリーンの定理より以下のような変形が可能である．なお，C 内の領域を Ω とする．

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z)\mathrm{d}z &= \oint_C (u(x, y) + iv(x, y))(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \\
&= \oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\oint_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \\
&= \iint_\Omega (-v_x - u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_\Omega (u_x - v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_\Omega (u_y - u_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_\Omega (v_y - v_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&=0
\end{aligned}$$

このとき，Ω の境界 $\partial\Omega = C$ で $f(z)$ は正則で Ω 全域でも $f(z)$ は正則でなければならないが，仮定より $f(z)$ は D で正則であり $\Omega \cup C \subset D$ であるため，この変形は整合性がある．

よって，命題は証明された．

□

これよりただちに以下の系が得られる．

系 1.　領域に定義される正則関数には不定積分が常に存在する．

Proof.

コーシーの積分定理より自明である．

□

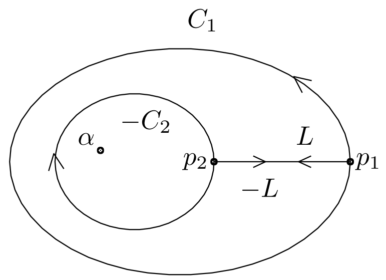
系 2.　$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $f(z)$ で D 内に存在する任意の単純閉曲線 C_1, C_2 でそれぞれの内部に存在する正則でない点が精々有限個でそれらが全て共通であり C_1 の内部に C_2 が存在するとすれば，

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

が成り立つ．

Proof.

C_1 と C_2 をそれぞれの 1 点 p_1, p_2 によって C_1 と C_2 に交わらないように弧状連結したとして，その連結曲線を L とあらわすとして，図のような閉曲線を考える．



このとき，コーシーの積分定理より

$$\begin{aligned}\oint_{C_1+L-C_2-L} f(z)\mathrm{d}z =& 0\\ \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{-C_2} f(z)\mathrm{d}z =& 0\\ \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z =& \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

となり，C_1 と C_2 は閉曲線となることから

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

となる．

よって，命題は証明された．

□

補題 1.　$z \in \mathbb{C}$ で領域 D における正則関数 $f(z)$ で $\alpha \in D$ の *1* 点で正則ではない関数は

$$\frac{f(z)}{z-\alpha}$$

と与えられる．このとき，D 内に存在する単純閉曲線 C の内部に α が存在するとき，

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z$$

が成り立つ．これを**コーシーの積分公式**という．

Proof.

正則でない点 α の集積点は存在しないため，C よりも内側に存在する α を中心とする，$\mathbb{R}$ 上の区間 $[0, 2\pi]$ で定義される変数 t を用いて D 内に存在する半径 r の円 $C' : z = \alpha + re^{it}$ を定義することができる．これを用いて周回積分を

計算する．

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z =& \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\mathrm{d}t \\ =& i\int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it})\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ここで，α の集積点は存在しないため $r \to 0$ とすることができる．

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z =& \lim_{r\to 0} i\int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it})\mathrm{d}t \\ =& i\int_0^{2\pi} f(\alpha)\mathrm{d}t \\ =& 2\pi i f(\alpha) \\ f(\alpha) =& \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

この補題により以下の定理が得られる．

正則関数の滑らかさ

$z \in \mathbb{C}$ で領域 D における正則関数 $f(z)$ は C^∞ 級関数であり，D 内に存在する単純閉曲線 C を与え，z が C の内部に存在するとすることで

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

が成り立つ．この式を**グルサの公式**という．

Proof.

コーシーの積分公式より，仮定から C 上で $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ は連続であるため，$f(z)$ の導関数は

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right)\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\mathrm{d}\zeta$$

となる．これにより，$f(z)$ が C^∞ であることが示された．

次に，グルサの公式を数学的帰納法により示す．

$n = 1$ のときは $f'(z)$ の導関数より自明であるため，n で命題が成り立つことを仮定して $n+1$ で成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(z) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right) \\ =& \frac{n!}{2\pi i}\oint_C -(n+1)\cdot(-1)\cdot\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{(n+1)+1}}\mathrm{d}\zeta \\ =& \frac{(n+1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{(n+1)+1}}\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

以上より，グルサの公式が成り立つことがわかる．

よって，命題は証明された．

□

1.3　冪級数展開

複素関数においても実数値関数と同様にして関数は冪級数展開が可能なものが存在する．そこで，最も単純な冪関数の展開に関する補題を与える．

補題 2.　$z \in \mathbb{C}$ による等比級数

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

において，$|z| < 1$ のときは収束して，その和は $S = \frac{1}{1-z}$ である．また，$|z| > 1$ のときは発散をする．

Proof.

この級数の第 n 項までの有限和 S_n は等比級数の和の公式より

$$S_n = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

であり，$|z| < 1$ のとき $n \to \infty$ で $|z^n| \to 0$ であることから $S = \frac{1}{1-z}$ である．同様にして，$|z| > 1$ のとき $n \to \infty$ で $|z^n| \to \infty$ であることから級数は発散する．

よって，命題は証明された．

□

テイラー展開

$z \in \mathbb{C}$ で領域 D における正則関数 $f(z)$ は $\alpha \in D$ で

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z - \alpha)^k$$

というように冪級数展開が可能である．これを複素数における**テイラー展開**という．

Proof.

コーシーの積分公式より α を中心とした D 内に存在する円形の積分路 C とその内部の領域に存在する z について，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

が成り立つ．z は C 内の領域に存在するため $|z - \alpha| < |\zeta - \alpha|$ であることから $\left| \frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha} \right| < 1$ である．つまり，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - \alpha) - (z - \alpha)} \\
&= \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} \\
&= \frac{1}{\zeta - \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} \right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - \alpha)^k}{(\zeta - \alpha)^{k+1}}
\end{aligned}$$

となり，これを $f(z)$ の積分形の式に代入することにより，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - \alpha)^k}{(\zeta - \alpha)^{k+1}} \right) \mathrm{d}\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (z - \alpha)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta$$

となり，グルサの公式を用いることにより

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z - \alpha)^k$$

となる．

よって，命題は証明された．

□

テイラー展開では正則領域での冪級数展開を与えているが，正則でない点を中心とした冪級数展開を考えることもできる．そこで，以下の定理を与える．

ローラン展開

$z \in \mathbb{C}$ で領域 D における複素関数 $f(z)$ が正則でない点についての集積点をもたないとき，$\alpha \in D$ で

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-\alpha)^k$$

というように冪級数展開が可能である．また，係数 a_k は $\{z \in D \,|\, |z-\alpha|\} \subseteq D$ の内部に存在する任意の単純閉曲線 C で内部に α を含むかつ，α 以外に正則でない点が内部に存在しないならば，

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{k+1}} \mathrm{d}z$$

と与えられ，これを**ローラン展開**という．特に，k について $(-\infty, -1]$ による冪級数部を**主要部**，$[0, \infty)$ による冪級数部を**正則部**という．

Proof.

コーシーの積分公式より C は α を中心とした円とすることができ，それを C_1 としてその内部に存在する α を含む単純閉曲線 C_2 をコーシーの積分定理の系の証明に用いた図のように与えると，

$$\begin{aligned} f(z) =& \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1 - C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \\ =& \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

となる．C_1 での周回積分についてはテイラー展開の証明と同様にして

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (z-\alpha)^k \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta$$

となる．C_2 では z は C_1 と C_2 の間の領域であるため $|z-\alpha| > |\zeta - \alpha|$ となり，$\left|\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\right| < 1$ であるため

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} =& \frac{1}{(\zeta-\alpha)-(z-\alpha)} \\ =& -\frac{1}{z-\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}} \\ =& -\frac{1}{z-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\right)^k \\ =& -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\alpha)^k}{(z-\alpha)^{k+1}} \\ =& -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\zeta-\alpha)^{k-1}}{(z-\alpha)^k} \end{aligned}$$

とななるため，

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} (z-\alpha)^{-k} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{1-k}} \mathrm{d}\zeta$$

となる．これらを元の式に代入することで，

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(z-\alpha)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta + \sum_{k=1}^{\infty}(z-\alpha)^{-k}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{1-k}}\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(z-\alpha)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta + \sum_{k=-\infty}^{-1}(z-\alpha)^{k}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}(z-\alpha)^k \frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}
$$

となり，変形中で C_1 と C_2 の間の領域は正則であることから C_1 と C_2 は C とすることができることを用いている．

よって，命題は証明された．

□

1.4　留数

ローラン展開によって正則でない点を解析的に扱うことが可能となる．ここで，正則でない点についての定義を与える．

定義 3.

$z \in \mathbb{C}$ による十分に小さくとることができる領域 D で定義される複素関数 $f(z)$ がある 1 点 $\alpha \in D$ を除き正則であるとき，α を**特異点**という．さらに，特異点が集積点をもつならば**集積特異点**といい，それ以外の特異点を**孤立特異点**という．

また，$f(z)$ のローラン展開は D に存在する特異点が孤立特異点のみであるとき定義でき，α におけるローラン展開の主要部が有限個であるとき，

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n \quad (a_{-k} \neq 0)$$

とあらわされるならば α は k **位の極**といい，k を極の**位数**という．孤立特異点のうち，$k=0$ となる特異点を**可除特異点**といい，極の定義できない主要部が無限大に存在する特異点を**真性特異点**という．

可除特異点は解析的にはあたかも存在しないように振る舞う特異点であり，k 位の極となる特異点 α は $f(z)(z-\alpha)^k$ とすることで特異点 α は除去できるが，真性特異点は除去ができないものである．

また，$f(z)$ の零点は逆数をとれば特異点となる．このことより，$f(z)$ の零点は $\frac{1}{f(z)}$ の特異点であると定義でき，それが極となるならばその位数を零点の**位数**といい，位数が k であるならば k **位の極**であるという．

ここで，自明な孤立特異点をもつ冪関数についての補題を与える．

補題 3.　$z, \alpha \in \mathbb{C}$ と $\mathbb{R}$ 上の区間 $[0, 2\pi]$ で定義される変数 t を用いて半径 r の円 $C' : z = \alpha + re^{it}$ を与えたとき，$n \in \mathbb{Z}$ で

$$\oint_C (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & (n=-1) \\ 0 & (other) \end{cases}$$

が成り立つ．

Proof.

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = ire^{it}$ より，

$$\int_0^{2\pi} r^n e^{itn} ire^{it}\mathrm{d}t = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\mathrm{d}t$$

となる．$n \geq 0$ のとき積分値が 0 になることおよび $n=-1$ のとき積分値が $2\pi i$ となることは自明である．$n \leq -2$ の

ときは

$$ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\mathrm{d}t = ir^{n+1}\left[\frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{(n+1)}(e^{i2\pi(n+1)}-1) = 0$$

となるため，$n \neq -1$ で積分値は 0 となる．

よって，命題は証明された．

□

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D で定義される複素関数 $f(z)$ が孤立特異点 $\alpha \in D$ でローラン展開をして，D 内に存在する任意の単純閉曲線でその内部に存在する特異点が α のみであるとき，補題より

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-\alpha)^k \mathrm{d}z = a_{-1}$$

となる．つまり，周回積分は積分路によらないことがわかる．ここで，a_{-1} の定義を与える．

定義 4.

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D で定義される複素関数 $f(z)$ を $\alpha \in D$ でローラン展開をしたとき，$(z-\alpha)^{-1}$ の係数を**留数**といい，$\mathrm{Res}(f,\alpha)$ とあらわす．また，α で正則であれば留数は 0 であることは自明である．

留数はローラン展開によって与えられるがローラン展開は一般に困難である．

そこで留数を求めるための補題を与える．

補題 4.　$z \in \mathbb{C}$ による領域 D で定義される複素関数 $f(z)$ が真性ではない孤立特異点 $\alpha \in D$ を除き正則であるとき，

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)^k f(z)$$

が *0* ではない有限の値に収束するとき，α は k 位の極である．

Proof.

仮定より，$f(z)$ は α でローラン展開をすることができ

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n \quad (a_{-m} \neq 0)$$

とあらわすことができる．まず，$m = k$ とすれば

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)^k f(z) = \lim_{z\to\alpha}\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-\alpha)^{n+k} = a_{-k} \neq 0$$

となり，0 でなはない有限の値に収束する．

次に，$m > k$ であるとすれば

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)^k f(z) = \lim_{z\to\alpha}\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-\alpha)^{n+k} = \lim_{z\to\alpha}\sum_{n=-m}^{-k} a_n(z-\alpha)^{n+k} = \infty$$

となり発散する．$m < k$ であれば

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)^k f(z) = \lim_{z\to\alpha}\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-\alpha)^{n+k} = 0$$

となり 0 に収束する．

よって，命題は証明された．

□

補題 5.　$z \in \mathbb{C}$ による領域 D で定義される複素関数 $f(z)$ が真性ではない孤立特異点 $\alpha \in D$ を除き正則であるとき，α が k 位極であるとき留数は，

$$\mathrm{Res}(f,\alpha) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}((z-\alpha)^k f(z))$$

によって求めることができる．

Proof.
まず，仮定より $f(z)$ の α におけるローラン展開によって

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$$
$$f(z)(z-\alpha)^k = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-\alpha)^{n+k}$$

となり，これの $(k-1)$ 階導関数を求めると，

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}(f(z)(z-\alpha)^k) = \sum_{n=-k+(k-1)}^{\infty}\frac{(n+k)!}{((n+k)-(k-1))!}a_n(z-\alpha)^{n+k-(k-1)}$$

となるため，$z \to \alpha$ とすれば

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}(f(z)(z-\alpha)^k) = \frac{(-1+k)!}{0!}a_{-1}(z-\alpha)^0 = (k-1)!a_{-1}$$

となる．
よって，命題は証明された．

□

留数定理

$z \in \mathbb{C}$ で領域 D における複素関数 $f(z)$ で D の内部に存在する任意の単純閉曲線 C で内部に n 個の孤立特異点 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が存在し，それ以外で正則であれば

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,\alpha_k)$$

となる．これを**留数定理**という．

Proof.
n 個の孤立特異点 α_i をそれぞれ囲うような C 内の閉曲線 C_i を与えれば，

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,\alpha_k)$$

となる．
よって，命題は証明された．

□

1.5　広義積分

実数値関数において $(-\infty,\infty)$ や特異点を境界とする積分区間等で広義積分が定義されるが，それを複素積分を用いることで計算する方法を考える．

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D で定義される複素関数 $f(z)$ を与えたとして，$\mathbb{R}$ 上の任意の区間 $[a,b]$ における積分を考える．

$x \in \mathbb{R}$ で $f(x)$ が三角関数による有理関数 $f(\sin x, \cos x)$ とあらわすことができるならば，$T = b - a$ として $z = e^{i\frac{2\pi x}{T}}$ と変数変換をすれば，複素数を用いた三角関数の定義より

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z^{\frac{T}{2\pi}} - z^{-\frac{T}{2\pi}}}{2i}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z^{\frac{T}{2\pi}} + z^{-\frac{T}{2\pi}}}{2}$$

となる．このとき，積分区間は複素数平面上の単位円 C を 1 周するような周回積分になり，留数定理を用いることで積分値の計算ができる．

$$\int_a^b f(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \oint_C f\left(\frac{z^{\frac{T}{2\pi}} - z^{-\frac{T}{2\pi}}}{2i}, \frac{z^{\frac{T}{2\pi}} + z^{-\frac{T}{2\pi}}}{2}\right)\frac{T}{2\pi i z}\mathrm{d}z$$

また，$f(x)$ が三角関数の積によってあらわされるとき，単位ステップ関数 $U(x)$ を用いることで

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(U(x-a) - U(x-b))e^{ix}\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)e^{ix}\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\cos x\mathrm{d}x + i\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x$$

となるため，$f(x)(U(x-a) - U(x-b))$ のフーリエ変換を利用して求めることも可能である．

一般には，$[a,b]$ を含むように周回積分路 C を選択し，C から実区間を除いた曲線部を C_r とすれば

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \oint_C f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z$$

というように実積分を計算することができる．周回積分に関しては，一般に選択した積分路に応じて留数定理より計算をすることが可能であるため，C_r における複素積分および $[a,b]$ の区間内に特異点をもつ場合を評価する必要がある．

まず，$[a,b]$ 上に右側極限と左側極限で相異なる符号をもつ特異点をもつ場合は以下のような定義が与えられる．

定義 5.

$x \in \mathbb{R}$ による関数 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の区間 $[a,b]$ で定積分するとき，$a < c < b$ を満たす c で

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = \pm\infty \quad \lim_{\varepsilon \to +0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x = \mp\infty$$

となるとき，これらの和による定積分が収束するならば，その積分値を**コーシーの主値**といい，その積分方法を**主値積分**という．また，これは以下のようにあらわされる．

$$PV\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$

主値積分で $a < c < b$ となる c に対して $\varepsilon \to +0$ を用いることから $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ の区間では曲線が存在しないため周回積分とならなくなる．そこで，それを回避するような半径 ε の半円 C_r' の積分路を追加することで

$$PV\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \oint_C f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z - \lim_{\varepsilon \to +0}\int_{C_r'} f(z)\mathrm{d}z$$

とあらわすことができる．ここで，半円 C_r' に沿った複素積分の積分値に関する以下の補題を与える．

補題 6.　$z \in \mathbb{C}$ による領域 D で定義される複素関数 $f(z)$ が $\alpha \in D$ で極であり，$D \setminus \{\alpha\}$ で $f(z)$ が正則であるとする．$\mathbb{R}$ 上の区間 $[0,\pi]$ で定義される変数 t を用いて半径 r の半円 $C_r : \alpha + re^{it}$ を与えたとき，特に α が *1* 位の極ならば

$$\lim_{r \to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = \pi i \mathrm{Res}(f, \alpha)$$

となり，ローラン展開による主要部の偶数項の係数が *0* でない項が存在するとき発散する．

Proof.

$f(z)$ を α でローラン展開したときの正則部を $f_r(z)$ とすれば，$f_r(z)$ は D で正則であることから C_r 上で有限の最大値 M が存在するため，

$$\left|\int_{C_r} f_r(z)\mathrm{d}z\right| \leq M\pi r$$

という関係式が得られ，$r \to 0$ で $M\pi r \to 0$ であることから $f(z)$ の α でローラン展開した正則部は 0 に収束する．

次に，α でローラン展開した主要部 $f_h(z)$ の積分を考える．α が k 位の極であるとすれば，

$$f_h(z) = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n}$$

となり，これの積分は

$$\begin{aligned}\int_{C_r} f_h(z)\mathrm{d}z &= \int_{C_r} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n}\mathrm{d}z \\ &= \sum_{n=1}^{k} \int_0^{\pi} \frac{a_{-n}}{r^n e^{itn}} ire^{it}\mathrm{d}t \\ &= i\sum_{n=1}^{k} r^{1-n}a_{-n}\int_0^{\pi} e^{it(1-n)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

となり，$r \to 0$ とすることで $k = 1$ であるときは $\pi i a_{-1} = \pi i\mathrm{Res}(f, \alpha)$ でとなる．$k > 1$ であるときは，

$$\begin{aligned}i\sum_{n=2}^{k} r^{1-n}a_{-n}\int_0^{\pi} e^{it(1-n)}\mathrm{d}t &= i\sum_{n=2}^{k} r^{1-n}a_{-n}\left[\frac{e^{it(1-n)}}{i(1-n)}\right]_0^{\pi} \\ &= \sum_{n=2}^{k} \frac{r^{1-n}a_{-n}}{1-n}(e^{i\pi(1-n)} - 1)\end{aligned}$$

n が 1 でない奇数であるときは $e^{i\pi(1-n)} - 1 = 0$ となることから

$$\int_{C_r} f_h(z)\mathrm{d}z = \pi i\mathrm{Res}(f, \alpha) + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{r^{1-2n}a_{-2n}}{1-2n}(e^{i\pi(1-2n)} - 1)$$

とあらわされる．総和部は係数 a_{-n2} が存在するとき r^{1-n} によって発散することから，α が 1 位の極であるとき $\pi i\mathrm{Res}(f, \alpha)$ に収束し，ローラン展開の主要部の偶数項の係数が 0 でない項が存在するとき発散する．

よって，命題は証明された．

□

次に，C_r について考えるが，これは与えられる $f(z)$ や積分路の取り方によって大きく異なるため，C_r が半円であることに限定して考える．

まず，a および b に特異点があるときは，$\mathbb{R}$ 上で a と b を連結していると考えて主値積分を適用するか，単純な広義積分であることから複素積分を用いずに実数の範囲で計算をするべきである．そのため，無限大を積分区間に含むものについての広義積分を考える．

周回積分は曲線上の積分であるため，$\mathbb{R}$ 上の独立変数 t のみの積分に変換が可能である．$[a, b]$ を $(-\infty, \infty)$ で考えれば,C_r は半径 r の半円であるとすることから t の区間は $[0, \pi]$ で $C_r : z = re^{it}$ とすることで，

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty} \int_0^{\pi} f(re^{it})rie^{it}\mathrm{d}t$$

とすることで極値問題を含むフーリエ変換に変形をすることができ，解くことができる場合がある．

ここで，以下の定理を示す．

ジョルダンの補助定理

$z \in \mathbb{C}$ による複素数の上半分で定義される複素関数 $f(z)$ を与える．$\mathbb{R}$ 上の区間 $[0, \pi]$ で定義される変数 t を用いて半径 r の半円 $C_r : \alpha + re^{it}$ における複素積分について，$r \to \infty$ で $|f(z)| \to 0$ としたとき $0 < a \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} f(z) e^{iaz} \mathrm{d}z = 0$$

が成り立つ．これを**ジョルダンの補助定理**という．

Proof.

$\mathbb{R}$ 上の区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ で

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$$

が成り立つため，r が十分に大きいことを用いれば

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t} \mathrm{d}t \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2r}{\pi}t} \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2r}\left[e^{-\frac{2r}{\pi}t}\right] = \frac{\pi}{2r}(1 - e^{-r}) < \frac{\pi}{2r}$$

が成り立つ．C_r 上における $|f(z)|$ の最大値 M を用いれば，

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_r} f(z) e^{iaz} \mathrm{d}z\right| \leq &\int_0^{\pi} \left| f(z) e^{ia(\alpha + re^{it})} ire^{it} \right| \mathrm{d}t \\
= &\int_0^{\pi} |f(z) e^{-ar\sin t}| \mathrm{d}t \\
\leq &M\pi r \int_0^{\pi} e^{-ar\sin t} \mathrm{d}t \\
\leq &2M\pi r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ar\sin t} \mathrm{d}t \\
< &M\pi^2
\end{aligned}$$

となり，$r \to \infty$ で $|f(z)| \to 0$ となることから $M \to 0$ であるため積分値は 0 に収束する．

よって，命題は証明された．

□

この定理を用いることで指数関数や三角関数を係数としてあらわすことのできる広義積分が解ける場合がある．