複素解析 -有理型関数の拡張-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 10 月 10 日

目次

第 1 章

有理型関数

1.1 零点

まずは正則関数の零点の集積点の存在に関する補題を与える．

補題 1. $z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $f(z)$ を与える．零点 $c \in D$ で任意の階数 k の導関数で $f^{(k)}(c) \neq 0$ となるならば c で $f(z)$ は集積点をもたない．

Proof.

この命題は，$f^{(k)}(c) \neq 0$ となる k が存在するならば，十分に小さい ε によって $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-c| < \varepsilon\}$ を与えることで，任意の $z \in U$ に対して $f(z) \neq 0$ が成り立つということと同値である．この対偶は，任意の $z \in U$ で $f(z) = 0$ ならば任意の階数 k の導関数で $f^{(k)}(c) = 0$ となるということである．

$f(z)$ は D で正則であるため c でテイラー展開が可能であり，収束半径 $R > 0$ をもつ．つまり，$|z-c| < \varepsilon < R$ となる ε と z が存在し，U が構築可能である．c が零点の集積点であるとすれば任意の $z_0 \in U$ によって

$$f(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(z_0 - c)^k$$

とあらわされるが，$(z_0 - c)^k \neq 0$ であるため $f(z_0) = 0$ であるには $f^{(k)}(c) = 0$ とならなければならない．

よって，命題は証明された．

□

一致の定理

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $f(z)$ の零点集合が D で集積点をもつならば $f(z)$ は D で恒等的に 0 である．

これを一致の定理という．

Proof.

$f(z)$ と任意の階数の導関数が 0 となる $z \in D$ の集合を D_0 として，任意の階数 k の導関数で $f^{(k)}(z) \neq 0$ となる k が 1 つでも存在する $z \in D$ の集合を D_1 とすれば，$D = D_0 \cup D_1$ と $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ という関係式が成り立つ．

z を中心とする半径 r の開円領域を $U_r(z)$ とあらわすとする．任意の $c \in D$ は正則であることから c を中心としたテイラー展開

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(z - c)^k$$

が可能であり，収束半径を R とすれば $|z-c| < r < R$ となる r が存在し，$U_r(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-c| < r\}$ という開集合を定義する．

$f^{(k)}(c) \neq 0$ となる k の存在を仮定する，つまり $c \in D_1$ として，その添え字で最小なものを n として新たに以下の

ような関数 $g(z)$ を定義することができる．

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-c)^n} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(c)}{(n+k)!}(z-c)^k$$

n は仮定より有限であるため収束半径は $f(z)$ と等しく，$g(z)$ は D で正則で $g(c) \neq 0$ となる．つまり，$z_1 \in U_r(c)$ で $(z_1 - c)^k \neq 0$ であることから $f(z_1) \neq 0$ であり，$c \in D_1$ ならば $U_r(c) \subseteq D_1$ となり，D_1 は開集合であることがわかる．

同様にして，$c \in D_0$ とすればテイラー展開より $z_0 \in U_r(c)$ で $f(z_0) = 0$ となり，$c \in D_0$ ならば $U_r(c) \subseteq D_0$ となり，D_0 は開集合であることがわかる．つまり，D は領域，すなわち連結開集合であることから $D = D_0$ もしくは $D = D_1$ のどちらかを満たす．

$D = D_0$ ならば D 全域で $f(z)$ が零点集合となるが，$D = D_1$ ならば零点 $c \in D$ で $f^k(c) \neq 0$ となる k が存在する．このとき，補題より c で $f(z)$ は集積点は存在しないため，c は孤立した零点であり，零点集合が集積点をもつことに矛盾することから $D = D_0$ となる．

よって，命題は証明された．

□

これよりただちに以下の系が得られる．

系 1.　$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $f(z)$ と $g(z)$ が点集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = g(z)\}$ で集積点をもつならば D で恒等的に $f(z) = g(z)$ である．

Proof.

$h(z) = f(z) - g(z)$ に一致の定理を適用することで自明である．

□

系 2.　$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $f(z)$ が零点をもつとき，孤立した零点か D 全域で $f(z)$ が恒等的に *0* かのどちらかである．これを**孤立零点の原理**という．

Proof.

一致の定理より自明である．

□

このように，一致の定理により正則関数の零点の集積点の普遍的な性質が与えられる．

次に，孤立した零点の個数について考える．そのためにまずは以下の定理を与える．

偏角の原理

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D で極以外の特異点をもたず，特異点以外で正則な関数 $f(z)$ を与え，D 内に存在する任意の単純閉曲線 C について C 上に $f(z)$ の零点もしくは極が存在しないならば，C 内部に存在する零点の数 α と極の数 β について

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = 2\pi i(\alpha - \beta)$$

が成り立つ．なお，α と β は位数 k のとき k 個であるとする．

これを**偏角の原理**という．

Proof.

まず，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

という関係式が成り立つことから

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = \oint_C \mathrm{d} \log f(z)$$

という関係式が成り立つ．また，対数を実部と虚部に分解すると

$$\oint_C \mathrm{d}\log f(z) = \oint_C \mathrm{d}\log|f(z)| + i\oint_C \mathrm{d}\arg f(z) = i\oint_C \mathrm{d}\arg f(z)$$

となり，偏角についての周回積分となる．

z_0 を k 位の零点であるとすると，$g(z_0) \neq 0$ となる複素関数 $g(z)$ を用いてテイラー展開より

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

とあらわすことができ，$f(z)$ の導関数は

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z)$$

となる．これより，

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

となり，$g(z)$ は z_0 で零点とならないことから $\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}$ は 1 位の極であり，留数が k であることがわかる．

同様にして z_1 を s 位の極であるとして，$h(z_1) \neq 0$ となる $h(z)$ を用いてローラン展開より

$$f(z) = (z - z_0)^{-s} h(z)$$

とあらわすことができ，$f(z)$ の導関数は

$$f'(z) = -s(z - z_0)^{-s-1} g(z) + (z - z_1)^k h'(z)$$

となり，

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-s}{z - z_1} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

という関係式が得られる．$h(z)$ は z_1 で零点とならないことから $\frac{f'(z_1)}{f(z_1)}$ は 1 位の極であり，留数が $-s$ であることがわかる．

ここで，全ての $f(z)$ の零点と極についての留数について添え字を与えれば，留数定理より以下の関係式が成り立つ．

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\sum k_i - \sum s_j\right) = 2\pi i(\alpha - \beta)$$

よって，命題は証明された．

□

ルーシェの定理

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D とその境界 ∂D の和となる閉領域 $D \cup \partial D$ で複素関数 $f(z), g(z)$ が正則であり，∂D で $|f(z)| > |g(z)|$ を満たすならば D で $f(z) + g(z)$ と $f(z)$ の零点の個数が一致する．なお，k 位の零点は k 個とする．

これを**ルーシェの定理**という．

Proof.

まず，D で正則であることから偏角の原理より

$$\oint_{\partial D} \mathrm{d}\log f(z) = \oint_{\partial D} \mathrm{d}\log\left(f(z) + g(z)\right)$$

となることを示せばいい．また，

$$f(z) + g(z) = f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) \;\Rightarrow\; \log\left(f(z) + g(z)\right) = \log f(z) + \log\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

となることから，

$$\oint_{\partial D} \mathrm{d}\log\left(f(z)+g(z)\right) = \oint_{\partial D} \mathrm{d}\log f(z) + \oint_{\partial D} \mathrm{d}\log\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

が得られる．これより，$h(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ とおいたとき，

$$\oint_{\partial D} \frac{h'(z)}{h(z)}\mathrm{d}z = 0$$

となることを示せばいい．∂D 上で $|f(z)| > |g(z)|$ となることから

$$|h(z)-1| = \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$$

であり，∂D 上で $0 < |h(z)| < 2$ となることから，$h(\partial D)$ 内部に $h(z) = 0$ を含まない．つまり，∂D における $h(z)$ の零点は存在しない．$w = h(z)$ と置換すれば，

$$\oint_{\partial D} \frac{h'(z)}{h(z)}\mathrm{d}z = \oint_{\partial D} \mathrm{d}\log h(z) = \oint_{h(\partial D)} \frac{\mathrm{d}\log w}{\mathrm{d}w}\mathrm{d}w = \oint_{h(\partial D)} \frac{1}{w}\mathrm{d}w$$

となるため，$\frac{1}{w}$ における周回積分となるが，$h(\partial D)$ 内部に $h(z) = 0$ を含まないため

$$\oint_{h(\partial D)} \frac{1}{w}\mathrm{d}w = 0$$

となる．

よって，命題は証明された．

□

複素関数における開写像定理

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $w = f(z)$ が定数関数でないとき，$f(D)$ は開集合，すなわち f は開写像である．

これを複素関数における**開写像定理**という．

Proof.

$f(D)$ が開集合であるには，任意の $z \in D$ で z の近傍 $U \subset D$ が存在して $f(U)$ が $f(z)$ の近傍である，つまりは $f(D)$ の全ての点が開円領域をもつ必要がある．

任意の $w_0 \in f(D)$ に対して $z_0 \in D$ が存在して $w_0 = f(z_0)$ となる．このとき，$g(z) = f(z) - w_0$ を考えれば z_0 を中心とするテイラー展開が可能であり，

$$g(z) = \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k - w_0 = \sum_{k=1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

とあらわすことができ，z_0 は $g(z)$ の 1 位の零点となる．また，$g(z)$ について十分に小さい ε をとれば，

$$U = \{z \in D \,|\, 0 < |z - z_0| \le \varepsilon\}$$

といった閉円領域で $0 \notin g(U)$ となるようにすることができる．

U の境界 ∂U 上で $|g(z)|$ は連続関数であるため最小値 μ が存在し，$z \in \partial U$ に対して

$$0 < \mu \le |g(z)|$$

であり，開円領域

$$W = \{w \in f(D) \,|\, |w - w_0| < \mu\}$$

を構築することが可能である．任意の $w_1 \in W$ によって $h(z) = f(z) - w_1$ とおけば，$h(z) = g(z) + (w_0 - w_1)$ であり，D の境界 ∂D で

$$|w_0 - w_1| < \mu < |g(z)|$$

となるため，ルーシェの定理より W に対して $g(z)$ と $h(z)$ は U 内で同じ個数の零点をもつ．つまり，$h(z)$ の定義より任意の $w_1 \in W$ に対して $f(z_1) = w_1$ となる $z_1 \in U$ が少なくとも 1 つ存在し，これは $W \subset f(U)$ であることを意味し，$W \subset f(U) \subset f(D)$ が得られる．

また，$w_0 \in W$ であるため w_0 は $f(D)$ の内点であり，w_0 は $f(D)$ の任意の点であるため $f(D)$ は開集合であり，f は開写像である．

よって，命題は証明された．

□

この定理は正則関数と微分可能な実数値関数の写像の特性としての明確な違いを示している．例えば，$x \in \mathbb{R}$ での $y = \sin x$ で定義域を $(-\pi, \pi)$ としたとき値域は $[-1, 1]$ となり開写像となるとは限らない．

また，正則関数をベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ 上の写像と考えると，定数関数とすると $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^0 = \{\}$ となり，正則関数とすると $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ である．つまり，正則関数は $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ となるものが存在しないということである．

ここで，$z \in \mathbb{C}$ と定数 $a_i \in \mathbb{C}$ による以下のような多項式 $f(z)$ を考える．

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

これは明らかに $\mathbb{C}$ 全域で正則である．また，このような $\mathbb{C}$ 全域で正則である複素関数を**整関数**という．これの零点となる z は $f(z) = 0$ とした代数方程式の解であり，正則関数の零点の性質を用いることで考えることが可能である．

ここで，以下の定理を与える．

代数学の基本定理

$z \in \mathbb{C}$ と定数 $a_i \in \mathbb{C}$ によって構成される n 次の代数方程式

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$$

で $a_n \neq 0$ ならば，重複を含めて n 個の複素数根が存在する．

これを**代数学の基本定理**という．

Proof.

正の $r\mathbb{R}$ を用いて $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < r\}$ を定義する．また，$f(z)$ において $\mathbb{C}$ は体であるため

$$f(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = 0$$

としても零点の分布は変わらない．ここで，

$$\begin{aligned} g(z) =& \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \\ h(z) =& z^n \end{aligned}$$

として r を十分に大きくとれば D の境界 ∂D で $|h(z)| > |g(z)|$ となる．つまり，ルーシェの定理より $f(z) = h(z) + g(z)$ と $h(z)$ の零点の個数は一致し，$h(z)$ の零点の個数は n 個であることが自明であるため，$f(z)$ は重複を含めて n 個の零点が存在する．

よって，命題は証明された．

□

1.2　正則関数の不変な性質

絶対最大値の原理

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $f(z)$ が定数関数でないとき $|f(z)|$ は D で最大値をとることはない．

Proof.

十分に小さい正数 r と $z_0 \in D$ による開円領域 $U_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ とその境界 ∂U_r を与えたとき，コーシーの積分定理より

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial U_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z)|}{|re^{it}|} |ire^{it}| \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| \mathrm{d}t$$

となり，∂U_r 上での $|f(z)|$ の最大値を M とすれば，

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)| \mathrm{d}t \leq M \;\Rightarrow\; |f(z_0) \leq M|$$

となる．z_0 で最大値をとるとすれば，$|f(z_0)| = M$ とならなければならず，r はいくらでも小さくできることから $U_r \cup \partial U_r$ で $|f(z)| = M$ となる．絶対値が一定な正則関数は定数関数であるため，$f(z)$ は定数関数であり，$g(z) = f(z) - M$ に一致の定理を適用することによって D で $f(z) = D$ となる．つまり，D 内で $|f(z)|$ が最大値をとるとき $f(z)$ は定数関数であり，その対偶をとることで $f(z)$ が定数関数でないときは $|f(z)|$ は D で最大値をとらないということとなる．

よって，命題は証明された．

□

これより，ただちに以下の系が得られる．

系 3.　$z \in \mathbb{C}$ における整関数 $f(z)$ が有界であるとき，それは定数関数である．

これを**リウヴィルの定理**という．

Proof.

絶対最大値の原理より自明である．

□

シュワルツの補題

$z \in \mathbb{C}$ による単位円領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ における正則関数 $f : D \to D$ が $f(0) = 0$ であるとき，$|f(z)| \leq z$ と $|f'(0)| \leq 1$ が成り立つ．また，$D \setminus \{0\}$ で $|f(z)| = |z|$ か $|f'(0)| = 1$ ならば $|a| = 1$ を満たす定数 $a \in \mathbb{C}$ を用いた $f(z) = az$ のみである．

これをシュワルツの補題という．

Proof.

仮定より $f(z)$ は $z = 0$ でテイラー展開が可能であり，

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + O(z^2) = f'(0)z + O(z^2)$$

とあらわすことができる．ここで，

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = f'(0) + O(z)$$

とすることで $g(z)$ は D 全域で正則であることがわかる．また，$z \to 0$ のとき $g(0) = f'(0)$ である．十分に小さい正数 r による開円領域 $U_r = \{z \in D \mid |z| < r\}$ とその境界 ∂U_r を与えれば，絶対最大値の原理より閉領域 $U_r \cup \partial U_r$ で $g(z)$

の最大値は ∂U_r 上でとる．$f : D \to D$ より $|f(z)| < 1$ であるため，

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}$$

となり，$r \to 1$ とすれば $|g(z)| \leq 1$ が得られる．これの両辺に $|z|$ をかければ $|f(z)| \leq |z|$ となる．

$D \setminus \{0\}$ で $|f(z)| = |z|$ なら $|g(z)| = 1$ となり $|g(0)| = |f'(0)| = 1$ となり，これは逆も成り立つ．絶対最大値の原理より $g(z)$ は D で $|g(z)| = 1$ を満たす定数関数であることから $a = g(z)$ とすることで $f(z) = az$ となる．

よって，命題は証明された．

□

複素関数における等角写像

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における正則関数 $w = f(z)$ を与えたとき，$z_0 \in D$ で $f'(z_0) \neq 0$ ならば z_0 で交わる 2 つの曲線 C_1, C_2 の成す角は $f(C_1), f(C_2)$ の成す角に等しい．

これを複素関数における**等角写像**という．

Proof.

$f(z)$ は正則であることから $f(C_1)$ と $f(C_2)$ が $f(z_0)$ を通ることは明らかである．z_0 近傍で C_1, C_2 上に存在する点を $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ として，その像をそれぞれ w_1, w_2 とする．

このとき，平均値の定理より

$$\begin{aligned}\frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z_0) + \varepsilon_1 \\ \frac{w_2 - w_0}{z_1 - z_0} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z_0) + \varepsilon_2\end{aligned}$$

となり，左辺に関して適当な実数値を用いて極形式であらわせば

$$\begin{aligned}z_1 - z_0 &= r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 - z_0 &= r_2 e^{i\theta_2} \\ w_1 - w_0 &= s_1 e^{i\phi_1} \\ w_2 - w_0 &= s_2 e^{i\phi_2}\end{aligned}$$

となる．これにより

$$\begin{aligned}\frac{s_1}{r_1} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z_0) + \varepsilon_1 \\ \frac{s_2}{r_2} e^{i(\phi_2 - \theta_2)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(z_0) + \varepsilon_2\end{aligned}$$

となり，$z_1, z_2 \to z_0$ をとれば $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ となることから

$$\frac{s_1}{r_1} e^{i(\phi_1 - \theta_1)} = \frac{s_2}{r_2} e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$$

が得られる．ここで，偏角に着目すれば $\theta_1 - \theta_1 = \phi_1 - \phi_2$ となるため角度を保存していることがわかる．

よって，命題は証明された．

□

これらは正則関数の不変量をあらわしており，2 次元における微分方程式の境界条件等に利用することができる．

1.3　有理型関数の定義

定義 1.

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における複素関数 $f(z)$ が $z_0 \in D$ で冪級数展開が可能であるとき，z_0 で $f(z)$ は**解析的**であるといい，任意の $z \in D$ で $f(z)$ が解析的であるとき $f(z)$ は**解析関数**であるという．特に，解析関数 $f(z)$ で極以外の特異点をもたないとき，$f(z)$ を**有理型関数**であるという．

一般に解析関数とされるのは定義より定義される領域の全域でローラン展開可能な複素関数である．そして，有理型関数とは定義さっる領域の全域でローラン展開可能で，その正則部が有限の冪級数であらわされるものであると考えることができる．

ここで，有理型関数の構築について以下の定理を与える．

有理型関数の集合

$\mathbb{C}$ による領域 D における有理型関数全体の集合は $\mathbb{C}$ の拡大体である．

Proof.

D における有理型関数の集合を $R(D)$ とする．$R(D)$ が環であることは $\mathbb{C}$ が体であることから自明であるため，$R(D)$ の乗法吸収元である 0 を除いた $R(D)\setminus\{0\}$ で乗法逆元が存在することを示す．

$f(z)\in R(D)\setminus\{0\}$ が k 位の極 z_0 のみをもつとして，$h(z_0)\neq 0$ となる正則関数 $h(z)\in R(D)\setminus\{0\}$ を用いてローラン展開より

$$f(z)=(z-z_0)^{-k}h(z)$$

とあらわすことができる．乗法単位元 $1\in R(D)$ について $f(z)g(z)=1$ となる $g(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z)g(z) =& 1 \\ g(z) =& \frac{1}{f(z)} \\ =& \frac{(z-z_0)^k}{h(z)} \end{aligned}$$

となる．一致の定理より，$h(z)$ は D で零点は孤立しており，$h(z)=0$ の場合を除き $h(z)$ の零点は全て有限の位数となることから $\frac{1}{h(z)}\in R(D)$ である．よって，$(z-z_0)^k\in R(D)$ であるため，$g(z)\in R(D)$ となる．

一致の定理より，任意の $R(D)\setminus\{0\}$ の元でも零点は集積点をもたないため同様の操作が可能であり，$R(D)$ が体であることが示される．また，定数関数も有理型関数であることから $\mathbb{C}\subset R(D)$ となり，$R(D)$ は $\mathbb{C}$ の拡大体である．

よって，命題は証明された．

□

この定理よりただちに以下の系が導かれる．

系 4.　*0 でない正則関数の商は有理型関数である．*

Proof.

有理型関数の集合は拡大体であるため，0 でない正則関数の逆数も有理型関数であり，有理型関数の積は有理型関数であるため 0 でない正則関数の商は有理型関数である．

よって，命題は証明された．

□

1.4　リーマン球面

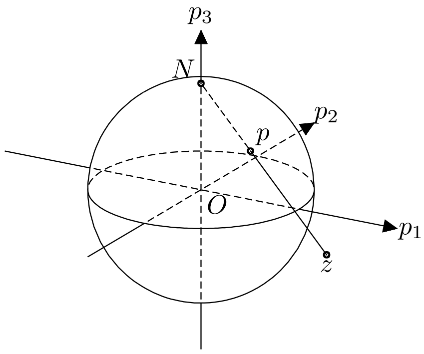
$\mathbb{R}^3$ における原点を中心とする半径 1 の球面 S とする．順序対 $p=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^3$ によって $\mathbb{R}^3$ 上の座標をあらわすとすれば

$$S=\left\{p\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\forall p_1,p_2,p_3\in\mathbb{R}\ s.t.\ p_1^2+p_2^2+p_3^2=1\right\}$$

となる．$\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ であることから $p_3=0$ を複素数平面として $z\in\mathbb{C}$ および $x,y\in\mathbb{R}$ に対して

$$z=x+yi=(x,y,0)$$

とおけば，$\mathbb{R}^3=\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ となる．S 上の $(0,0,1)$ を**北極点**，$(0,0,-1)$ を**南極点**という．北極点を N として N と S 上の p を結ぶ直線は $p_3=0$ における $z=(x,y,0)$ と交わり，これは以下のような図となる．



このとき，ある $t \in \mathbb{R}$ が存在して $p = z + t(N - z)$ が成り立ち，p_3 についてあらわすと

$$p_3 = 0 + t(1 - 0) = t$$

となるため，

$$\begin{aligned}(p_1, p_2) =&(x, y) + p_3(-x, -y)\\(x, y) =&\frac{1}{1 - p_3}(p_1, p_2)\end{aligned}$$

あらわすことができ，$S \setminus \{N\}$ と $\mathbb{C}$ で 1 対 1 の関係が成り立つ．このような $p \to z$ の射影を**立体射影**という．

また，$|p|^2 = 1$ であることから

$$\begin{aligned}|z + t(N - z)|^2 =&1\\|(x, y, 0) + t(-x, -y, 1)|^2 =&1\\x^2(1 - t)^2 + y^2(1 - t)^2 + t^2 =&1\\x^2 + y^2 =&\frac{1 - t^2}{(1 - t)^2}\\|z|^2 =&\frac{1 + t}{1 - t}\\t =&\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\end{aligned}$$

で $t = p_3$ であるため

$$p_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

となる．p_1 と p_2 も同様にして

$$(p_1, p_2) = (1 - p_3)(x, y) = \frac{(|z|^2 + 1) - (|z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1}(x, y) = \frac{2}{|z|^2 + 1}(x, y)$$

となり，$S \setminus \{N\}$ と $\mathbb{C}$ で 1 対 1 の射影が得られた．

N に対応する $\mathbb{C}$ の点は存在しないが，極限を考えれば $|z| \to \infty$ で $p \to N$ となる．このように複素数平面で無限に離れた点を**無限遠点**という．これはちょうど複素数平面が S によって拡張されたものとなり，以下の定義を与えることができる．

定義 2.

$z \in \mathbb{C}$ において無限遠点 $|z| \to \infty$ を加えた集合 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を**拡張された複素数平面**といい，立体射影の定義される $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ 上で定義される球面 S を**リーマン球面**という．拡張された複素数平面は単に $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ もしくは $\hat{\mathbb{C}}$ とあらわされ，$\hat{\mathbb{C}}$ を単にリーマン球面ということもある．

$S \setminus \{N\}$ であれば

$$z = \frac{p_1 + p_2 i}{1 - p_3}$$

となるが，N を無限遠点と同一視することで $S = \hat{\mathbb{C}}$ とすることができる．これより，$\hat{\mathbb{C}}$ での無限遠点での振る舞いを考える．

S 上の N の近傍をあらわす集合は十分に小さい $\varepsilon > 0$ を用いることで

$$\left\{p \in S \,\middle|\, p_1^2 + p_2^2 + (p_3 - 1)^2 < \varepsilon^2\right\}$$

とあらわされる．$p \neq N$ なら

$$p_1^2 + p_2^2 + (p_3 - 1)^2 = \frac{4|z|^2}{(|z|^2+1)^2} + \frac{-4}{(|z|^2+1)^2} = \frac{4(|z|^2+1)}{(|z|^2+1)^2} = \frac{4}{|z|^2+1}$$

となるため，

$$\frac{4}{|z|^2+1} < \varepsilon^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{4-\varepsilon^2}{\varepsilon^2} < |z|^2$$

となり，十分に大きい $R > 0$ に対して

$$U_R(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$$

とおけば

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\sqrt{4-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

によって

$$U_{\rho(\varepsilon)}(\infty) = \left\{p \in S \,\middle|\, p_1^2 + p_2^2 + (p_3 - 1)^2 < \varepsilon^2\right\}$$

となる．つまり，$|z| \to \infty$ の近傍は $U_{\rho(\varepsilon)}(\infty)$ で与えられる．実際，$\rho(\varepsilon) \to \infty$ で $\varepsilon \to 0$ となる．

$z \in \hat{\mathbb{C}}$ で $z_0 \in \mathbb{C}$ を除いて z_0 の近傍で定義される関数 $f(z)$ が $z \to z_0$ で $|f(z)| \to \infty$ であるとする．このとき，イプシロンデルタ論法より任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して

$$0 < |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(z)| > \rho(\varepsilon)$$

となるため $f(z) \in U_{\rho(\varepsilon)}(\infty)$ となる．つまり，$z \to z_0$ で $f(z) \to \infty$ である．このとき，極限として

$$f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

とすることができる．同様にして $|z| \to \infty$ で $f(z) \to 0$ となれば極限として

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} f(z) = 0$$

とすることができる．

よって，以下の定義が与えられる．

定義 3.

$z \in \mathbb{C}$ について

$$z + \infty = \infty$$

と，$z \neq 0$ であれば

$$z \cdot \infty = \infty$$

と定義することができる．同様にして $z \neq 0$ とすれば極限により

$$\frac{z}{0} = \lim_{z_0 \to 0} \frac{z}{z_0} = \infty$$
$$\frac{z}{\infty} = \lim_{z_0 \to \infty} \frac{z}{z_0} = 0$$

と定義することができる．

1.5　メビウス変換

$z \in \mathbb{C}$ と複素定数 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ で $ad - bc \neq 0$ であるとき，

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

となる関数を考える．$c \neq 0$ で

$$f\left(\frac{-d}{c}\right) = \frac{-\frac{ad}{c}+b}{-d+d} = \lim_{z \to 0} \frac{-\frac{ad}{c}+b}{z} = \infty$$

$$f(\infty) = \lim_{z \to \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z \to \infty} \frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}} = \frac{a}{c}$$

とすることでリーマン球面への拡張を与えることができる．また，一般線型作用素 $GL_2(\mathbb{C})$ の元として

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

および，

$$z \sim \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

といった同値関係を与えることで

$$Az = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

とすることができる．このとき，以下のように第 1 行が分子で第 2 行が分母を示す有理関数と自然に同一視される．

$$\begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \frac{az+b}{cz+d}$$

つまり，$B \in GL_2(\mathbb{C})$ を与えることで

$$(AB)z = A(Bz)$$

というように行列の積として合成が可能であり，$\mathbb{C}$ が体であることから $GL_2(\mathbb{C})$ の任意の元は乗法逆元が存在し，乗法単位元は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

として与えられることから $f(z)$ 全体は群を成し，それを**メビウス群**という．$GL_2(\mathbb{C})$ は退化次元が生じないためメビウス群の元は $\hat{\mathbb{C}}$ の自己同型射であり，メビウス群は自己同型群となるため $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ とあらわされる．

よって，以下の定義が与えられる．

定義 4.

$z \in \mathbb{C}$ による複素関数 $f(z)$ を複素定数 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ を用いた有理関数

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

を**メビウス変換**もしくは**1 次分数変換**という．なお，$ad - bc \neq 0$ である．

メビウス変換は $\hat{\mathbb{C}}$ 全体への変換をあらわすことができるが，幾何学的変形も可能である．例えば，$|a| = 1$ として

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を与えれば，これは回転変換である．同様にして反転変換，スケール変換，平行移動を与えることができる．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このようにメビウス変換は $\hat{\mathbb{C}}$ の幾何学的変形として特徴づけることができる．

第 2 章

解析接続

2.1 解析接続の定義

定義 5.

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D_1 における有理型関数 $f_1(z)$ が与えられたとして，D_2 を $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ とする．このとき，D_2 で定義された有理型関数 $f_2(z)$ が $D_1 \cap D_2$ で $f_1(z)$ と一致するとき，$f_2(z)$ を $f_1(z)$ の**解析接続**もしくは $f_1(z)$ の D_2 への**解析接続**という．

例えば，$z \in \mathbb{C}$ で

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

は $|z| < 1$ で正則関数であるが，

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z}$$

は $\mathbb{C}$ 全域で有理型関数であり，$f_1(z)$ と $f_2(z)$ は $|z| < 1$ を満たす領域で一致する．このとき，$f_1(z)$ は $f_2(z)$ によって $\mathbb{C}$ 全体に定義域を拡張することができ，$f_2(z)$ は $f_1(z)$ の解析接続となる．

ここで，以下の定理を示す．

解析接続の一意性

$z \in \mathbb{C}$ による領域 D_1 における有理型関数 $f_1(z)$ と D_2 における $f_2(z)$ による $f_1(z)$ から $f_2(z)$ の $D_1 \cap D_2$ による解析接続が存在するとき，それは一意に定まる．

Proof.

一致の定理より自明である．

□

また，一般に $z \in \mathbb{C}$ による領域列 $D_0, D_1, \cdots, D_n$ とそれらに対応する有理型関数列 $f_0(z), f_1(z), \cdots, f_n(z)$ を与え，$k \in \mathbb{N}$ によって

$$D_{k-1} \cap D_k \neq \emptyset$$

を満たすとき，$f_{k-1}(z)$ から D_k への解析接続 $f_k(z)$ が存在するとき，$f_0(z)$ は $D_1, D_2, \cdots, D_n$ に沿って解析接続可能であり，$f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z)$ は全て $f_0(z)$ の解析接続といい，一意性により $f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z)$ は $f_0(z)$ によって一意に定まる．

しかし，$D_0 \cap D_n \neq \emptyset$ であるとき任意の $z_0 \in D_0 \cap D_n$ で $f_0(z_0) = f_n(z_0)$ となるとは限らない．$f_0(z_0) \neq f_n(z_0)$ であるとき，さらに領域列 $D_{n+1}, D_{n+2}, \cdots, D_m$ に沿った解析接続 $f_{n+1}(z), f_{n+2}(z), \cdots, f_m(z)$ が存在して，$f(z) = f_m(z)$ として $D_0 \cap D_n \cap D_m \neq \emptyset$ ならば $f(z)$ は $z_0 \in D_0 \cap D_n \cap D_m$ で $f_0(z_0), f_n(z_0), f_m(z_0)$ の 3 つの値をとる．このように，$f(z)$ は多価有理型関数となる．

つまり，一般に解析接続は 1 価関数とはならない．しかし，$f_1(z)$ は $f_0(z)$ から直接構築されるため 1 価関数であり，

これを $f_2(z), f_3(z), \cdots, f_m(z)$ と区別して，$f_1(z)$ のことを $f_0(z)$ の**直接解析接続**という．また，$f_0(z)$ から可能な限り解析接続を繰り返すことで得られる有理型関数 $f(z)$ を**完備な解析関数**という．

また，解析接続は解析的な性質を保存するため，$f_1'(z), f_2'(z), \cdots, f_m'(z)$ は $f_0'(z)$ の解析接続となる．

2.2　冪級数展開

解析接続は有理型関数で定義されるため，$z \in \mathbb{C}$ による領域 D_0 における有理型関数 $f_0(z)$ はローラン展開により冪級数による定義が可能であり，$c_1 \in \mathbb{C}$ および c_1 が k_1 位の極ならば

$$f_1(z) = \sum_{n=-k_1}^{\infty} a_{1,n}(z-c_1)^n = \sum_{n=-k_1}^{\infty} \frac{f_0^{(n)}(c_1)}{n!}(z-c_1)^n$$

という定義により $f_0(z)$ と $f_1(z)$ は同一視することができる．また，$f_1(z)$ は c_1 を中心とする $f_0(z)$ の**関数要素**という．このとき，収束半径を $r_1 \in \mathbb{R}$ で $0 < r_1 < \infty$ とすれば $f_1(z)$ は開円領域を

$$U_r(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < r\}$$

とおくことで，$U_1 = U_{r_1}(c_1)$ で定義される．このとき，$D_0 \cap U_1 \neq \emptyset$ で $f_0(z)$ と $f_1(z)$ は一致し，$U_1 \not\subset D_0$ となる場合は $f_1(z)$ は $f_0(z)$ の直接解析接続となる．

また，同様にして有理型関数 $f_2(z), f_3(z), \cdots, f_n(z)$ は

$$f_m(z) = \sum_{n=-k_m}^{\infty} a_{m,n}(z-c_m)^n = \sum_{n=-k_m}^{\infty} \frac{f_{m-1}^{(n)}(c_m)}{n!}(z-c_m)^n$$

と U_m で定義することができ，$U_m \not\subset U_{m-1}$ となるならば $f_{m-1}(z)$ から $f_m(z)$ への直接解析接続となる．

特に，s 階導関数 $f_m^{(s)}(z)$ は $f_{m+1}(z)$ の構築に必要あるが，$k_m \neq 0$ であるときは c_m は極であるため主要部と正則部で場合分けをする必要があるため計算が困難である．そこで，U_m で $f_m(z)$ は有理型関数であるため，集積特異点は存在しないことから $c_m \in U_m$ とは別の $f_m(z)$ で正則な $c_m' \in U_m$ が存在し，それにより

$$f_m^{(s)}(z) = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{n!}{(n-s)!} a_{m,n}(z-c_m')^{n-s}$$

とあらわすことができる．これにより $a_{m+1,n}$ は

$$a_{m+1,n} = \frac{f_m^{(n)}(c_{m+1})}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{\infty} \frac{i!}{(i-n)!} a_{m,i}(c_{m+1}-c_m')^{i-n} = \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i}{n} a_{m,i}(c_{m+1}-c_m')^{i-n}$$

と与えることができる．

一般に，領域 D における有理型関数 $f(z)$ が D の閉包の外で解析接続できないとき，D の境界を $f(z)$ の**自然境界**という．

2.3　曲線に沿った解析接続

$\hat{\mathbb{C}}$ 上の $a, b \in \hat{\mathbb{C}}$ を結ぶ曲線

$$\begin{aligned}
&\varphi : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{C}} \\
&\varphi(0) = a \\
&\varphi(1) = b
\end{aligned}$$

となる連続関数 $\varphi(t)$ を与えたとする．$z \in \mathbb{C}$ による領域 D における有理型関数 $f_0(z)$ は $c \in D$ によりローラン展開が可能であり，c を k 位の極であるとすると

$$f_0(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-c)^n$$

となる．このとき，収束半径を r とすれば $0 < r < \infty$ であり，開円領域

$$U_r(c) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - c| < r\}$$

で有理型関数となる．ここで，$c = \varphi(0)$ を始点として $c = \varphi(1)$ を終点とするように曲線に沿った解析接続を考えれば，収束半径および c の極の位数を与える関数を $r(t), k(t)$ とすることで冪級数

$$f(z,t) = \sum_{n=-k(t)}^{\infty} a_n (z - \varphi(t))^n$$

が与えられ，$\varphi(t)$ の全域での $f(z,t)$ の集合族

$$\mathcal{F} = \{f(z,t) \,|\, t \in [0,1] \subset \mathbb{R}\}$$

を定義することができる．このとき，

(1)$f(z,0) = f_0(z)$

(2) 各点 $s \in [0,1]$ に対して正数 $\delta(s)$ が定まって $|t - s| < \delta(s)$ のとき $f(z,t)$ は $f(z,s)$ の直接解析接続となる

の 2 条件を満たすとき，$\mathcal{F}$ を $f_0(z)$ の $\varphi(t)$ に沿った解析接続という．

第 2 条件に関してはイプシロンデルタ論法により，任意の正数 $\varepsilon(s)$ に対して $|t - s| < \delta(s)$ となる $\delta(s)$ が存在して $|r(t) - r(s)| < \varepsilon(s)$ が成り立つという $t \to s$ で $r(t) \to r(s)$ となる極限を示している．つまり，$f(z,t)$ は $U_{r(t)}(\varphi(t))$ で定義された有理型関数となることから，$t \to s$ で $r(t) \in U_{r(s)}(\varphi(s))$ となるため $U_{r(t)}(\varphi(t)) \cap U_{r(s)}(\varphi(s)) \neq \emptyset$ となることがわかる．