微分積分学 -微分法・積分法-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2018 年 7 月 17 日
最終更新 2020 年 1 月 23 日

目次

第 1 章

微分法

1.1　微分法の定義

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $y = f(x) \in \mathbb{R}$ において，$x = x_0$ から h だけ増加したときの平均変化率は

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

とあらわされ，$h \to 0$ としたときの極限値は y の x_0 における瞬間の変化率，つまりは y の x_0 における傾きであり，これを $f'(x_0)$ とおく．

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

このとき，$(x_0, f(x_0))$ を通り傾きが $f'(x_0)$ の直線を y の x_0 における**接線**といい，$(x_0, f(x_0))$ のことを**接点**という．また，この直線の式は平行移動則より

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

となる．

ここで，$f'(x_0)$ について以下のような定義を与える．

定義 1.1

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $y = f(x) \in \mathbb{R}$ において，$x = x_0$ における瞬間の変化率は以下のようにあらわされ，これを $f'(x_0)$ と定義する．

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

このとき，$f''(x_0)$ を y の x_0 における**微分係数**といい，微分係数が存在するとき，y は x_0 で**微分可能**であるという．

また，任意の x に対して微分係数を対応させる演算

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を考えれば，$f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数**であるといい，$f'(x)$ を求める演算を $f(x)$ を**微分**するという．また，微分をあらわす演算子を**微分作用素**もしくは**微分演算子**といい，$f'(x), y'$ とあらわす記号を**ニュートン記号**，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ とあらわす記号を**ライプニッツ記号**という．

$f(x)$ において，$x = x_0$ で微分可能であるときの関数の連続性について考える．$f(x)$ が x_0 で連続であるとは，$x \to x_0$ で $f(x)$ が $f(x_0)$ と一致すればいいため

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

とすれば，$f(x)$ が x_0 で微分可能であるならば $f(x)$ は x_0 で連続である．逆に，x_0 で微分可能であるための必要条件は x_0 で連続であることである．

定理 1.1

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ において，定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を用いることにより

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

が成り立つ．これは微分演算が線型演算であることを示している．

Proof.

導関数の定義より

$$\begin{aligned}
(\alpha f(x) + \beta g(x))' &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{(\alpha f(x+h) + \beta g(x+h)) - (\alpha f(x) + \beta g(x))}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\alpha f(x+h) - \alpha f(x)}{h} + \frac{\beta g(x+h) - \beta g(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\alpha \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \beta \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\
&= \alpha f'(x) + \beta g'(x)
\end{aligned}$$

となり，線型性を満たす．

よって，命題は証明された．

□

また，$f(x)$ が n 回微分可能であるとき，その n 回微分した導関数を $f^{(n)}(x), \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$ とあらわし，これを n **次導関数**という．特に，$n \geq 2$ であるときの導関数を**高次導関数**という．

1.2　導関数の連鎖律

合成関数の導関数について考える．厳密な導関数の必要十分条件を考えるために，以下の補題を与える．

補題 1.1　独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $y = f(x) \in \mathbb{R}$ が $x = x_0$ で微分可能である必要十分条件は

$$f(x_0 + \delta) - f(x_0) = (y_0 + \varepsilon)\delta$$

に対して，$\delta \to 0$ で $\varepsilon \to 0$ となる定数 $y_0 (= f'(x_0))$ が存在することである．

Proof.

まず，命題の式を ε について解くと

$$\varepsilon = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0) - y_0 \delta}{\delta} = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta} - y_0$$

となり，$\delta \to 0$ で $\varepsilon \to 0$ となる定数 y_0 が存在するとき，y_0 は $f'(x_0)$ であり，$f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能である．

$f(x)$ が $x = x_0$ で微分可能であるとき，イプシロン-デルタ論法により微分係数についての極限は

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \delta' > 0 \ s.t. \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon'$$

とあらわされ，

$$\delta = x - x_0, \quad \varepsilon = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0), \quad y_0 = f'(x_0)$$

とおくことにより，命題の元の式が得られ，$\delta \to 0$ で $\varepsilon \to 0$ となる．

よって，命題は証明された．

□

定理 1.2

微分可能な実数値関数 f,g による独立変数 x を用いた合成関数 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ の微分は

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}=f'(g(x))g'(x)$$

のようになり，これを微分における**連鎖律**もしくは**チェーンルール**という．

Proof.

x_0 の近傍で $g(x_0)$ と等しい点，つまり $g(x_0+h)$ でどんなに $h\to 0$ としても $g(x_0)$ に等しい点が存在する場合は $g(x)-g(x+h)=0$ となるためイプシロン-デルタ論法に則った極限を用いた証明をする必要がある．

補題より，$\delta_1,\delta_2\to 0$ で $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ となるように

$$\begin{cases} f(g(x+\delta_2))-f(g(x))=(f'(g(x))+\varepsilon_1)\delta_1 \\ \delta_1=g(x+\delta_2)-g(x)=(g'(x)+\varepsilon_2)\delta_2 \end{cases}$$

が成り立つ．これを代入することにより，

$$f(g(x+\delta_2))-f(g(x))=(f'(g(x))+\varepsilon_1)(g'(x)+\varepsilon_2)\delta_2$$

が得られる．仮定より $g'(x)$ は存在するため

$$y'=\lim_{\delta_2\to 0}\frac{f(g(x+\delta_2))-f(g(x))}{\delta_2}=(f'(g(x))+0)(g'(x)+0)=f'(g(x))g'(x)$$

となり，合成関数の導関数に関する等式が得られる．

よって，命題は証明された．

□

1.3　積の導関数

定理 1.3

独立変数 $x\in\mathbb{R}$ による関数 $f(x),g(x)\in\mathbb{R}$ において，これらの積よってあらわされる導関数は

$$\begin{cases} (f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\ \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \end{cases}$$

を満たす．おな，これらは本質的に同一の式である．

また，高次導関数については

$$(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

が成り立ち，これを**ライプニッツの公式**という．

Proof.

導関数の定義より

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x+h)g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\frac{-f(x)+f(x+h)}{h}g(x)\right)\\&=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\end{aligned}$$

となり，微分の連鎖律より

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= f(x)(g(x))^{-1} \\ &= f'(x)(g(x))^{-1} + f(x)(g(x))^{-2}(-1)g'(x) \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

が得られる．

高次導関数については数学的帰納法により証明する．$n = 1$ のとき成り立つのは明らかのため n で成り立つことを仮定して，$n + 1$ で成り立つことを示す．

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))^{(n+1)} =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x))^{(n)} \\ =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \\ =& \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)) \\ =& f(x)g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\ & + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + f^{(n+1)}(x)g(x) \\ =& \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\end{aligned}$$

よって，命題は示された．

□

1.4　逆関数の導関数

定理 1.4

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $y = f(x) \in \mathbb{R}$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在するとき，この導関数は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

のように求めることができる．

Proof.

$y = f(f^{-1}(y))$ となることから，連鎖律を用いて y で微分することにより

$$\begin{aligned}1 =& f'(f^{-1}(y))f'^{-1}(y) \\ 1 =& f'(x)f'^{-1}(y) \\ f'^{-1}(y) =& \frac{1}{f'(x)}\end{aligned}$$

が得られる．

よって，命題は証明された．

□

1.5　媒介変数表示の導関数

定理 1.5

媒介変数 $t \in \mathbb{R}$ による関数 $x = f(t), y = g(t) \in \mathbb{R}$ の導関数は

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

のように求めることができる．

Proof.

$y = g(f^{-1}(x))$ となることから連鎖律と逆関数の導関数の性質により，x で微分することで

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =& g'(f^{-1}(x))f'^{-1}(x) \\ =& \frac{g'(t)}{f'(t)}\end{aligned}$$

となる．

よって，命題は証明された．

□

1.6　平均値の定理

微分法における平均値の定理を示す前に，導関数に関する存在定理を示す．

定理 1.6　ロルの定理

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $f(x) \in \mathbb{R}$ が閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ で連続で開区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ で微分可能であり $f(a) = f(b)$ を満たすならば，導関数 $f'(x)$ は (a, b) 上で零点をもつ．これを**ロルの定理**という．

Proof.

仮定および最大値最小値定理より，$[a, b]$ で $f(x)$ は最大値および最小値をもつ．$c \in (a, b)$ で $f(x)$ が最大値をとるとすれば，仮定より (a, b) で微分可能であることから微分係数

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在する．

また，c で $f(c)$ が最大値であることから $f(c+h) < f(c)$ であり，分子は負数である．つまり，

$$f'(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$
$$f'(c) = \lim_{h \to -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

であることから $f'(c) = 0$ となる．c で最小値をとるときも同様である．

よって，命題は証明された．

□

定理 1.7　ラグランジュの平均値の定理

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $f(x) \in \mathbb{R}$ が閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ で連続で開区間 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ で微分可能であるならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

を満たす $c \in (a,b)$ が少なくても 1 つ存在する．これを**ラグランジュの平均値の定理**という．

Proof.

$[a,b]$ の平均変化率を m とおけば，a を通る傾き m の直線の方程式は $y = m(x-a)+f(a)$ となる．これと $f(x)$ の差を示す関数を

$$F(x) = f(x) - m(x-a) - f(a)$$

とおく．$F(x)$ に対して a および b を代入すれば

$$\begin{aligned} F(a) =& f(a) - m(a-a) - f(a) = 0 \\ F(b) =& f(b) - m(b-a) - f(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = 0 \end{aligned}$$

となるため，$F(a) = F(b)$ で，$F(x)$ は (a,b) で微分可能であることからロルの定理が適応可能である．$F(x)$ の導関数は

$$F'(x) = f'(x) - m$$

となることから，ロルの定理より，$F'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ が存在し，$f'(c) = m$ となる．

よって，命題は証明された．

□

また，$a<c<b$ より $0<c-a<b-a$ で $0 < \frac{c-a}{b-a} < 1$ となることから，$h = b-a, \theta = \frac{c-a}{b-a}$ とおくことにより，ラグランジュの平均値の定理は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a+\theta h)$$

とあらわすことができる．

ラグランジュの平均値の定理の一般化として以下の定理を与えることができる．

定理 1.8　コーシーの平均値の定理

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ が閉区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ で連続で開区間 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ で微分可能で (a,b) で $g'(x) \neq 0$ であるならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす $c \in (a,b)$ が少なくても 1 つ存在する．これを**コーシーの平均値の定理**という．

Proof.

$m = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ とおき，ラグランジュの平均値の定理の証明と同様の差を示す関数

$$F(x) = f(x) - m(g(x)-g(a)) - f(a)$$

を定義する．$F(x)$ に対して $g(a)$ および $g(b)$ を代入すれば

$$\begin{aligned} F(a) =& f(a) - m(g(a)-g(a)) - f(a) = 0 \\ F(b) =& f(b) - m(g(b)-g(a)) - f(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b)-g(a)) = 0 \end{aligned}$$

となり，$F(a) = F(b)$ で，$F(x)$ は (a,b) で微分可能であることからロルの定理が適応可能である．$F(x)$ の導関数は

$$F'(x) = f'(x) - mg'(x)$$

となることから，ロルの定理より，$F'(c)=0$ となる $c \in (a,b)$ が存在し，$f'(c)=mg'(c)$ となる．

よって，命題は証明された．

□

定理 1.9　ロピタルの定理

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ 関数 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ が $x=a$ の近傍で微分可能であり

$$\lim_{x\to a} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \\ \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) \to \pm\infty \end{cases}$$

のいずれかを満たすとすれば，極限値

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

が存在するとき

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

を満たす．これを**ロピタルの定理**という．

Proof.

$x \to a$ で $f(x), g(x) \to 0$ の場合を証明する．

仮定より，a と x の間に存在する c に対して，コーシーの平均値の定理より

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

を満たす．また，$x \to a$ で $c \to a$ となることから

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となり，定理の関係式が得られる．

また，$x \to a$ で $f(x) = \pm g(x) = \pm\infty$ のときは逆数の極限について

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{g(a)} = 0$$

となることから定理の関係式が成り立つことがわかる．

よって，命題は証明された．

□

第 2 章

積分法

2.1 定積分の定義

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $y = f(x) \in \mathbb{R}$ で x に対する区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ を n 個に分割して，その各分点を x_k とあらわし，$[x_{k-1}, x_k]$ の小区間の幅を $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ とする．

このとき，$f(x)$ が $[a, b]$ で，x 軸とそれに対応する $f(x)$ の総和 S は

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Delta x_k$$

となり，これを**リーマン和**という．$\Delta x_k \to 0$ とすれば，x 軸とその区間に対応する $f(x)$ の面積に等しくなる．

ここで，以下の定義を与える．

定義 2.1

独立変数 x による関数 $y = f(x) \in \mathbb{R}$ で区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ を n 個に分割して，その各分点を x_k とあらわし，$[x_{k-1}, x_k]$ の小区間の幅を $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ とする．x 軸とその区間に対応する $f(x)$ の面積を $f(x)$ の $[a, b]$ に対する**リーマン積分**もしくは**定積分**といい

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Delta x_k$$

とあらわす．なお，$f(x)$ が負の値をとるときは面積も負の値をとる．定積分が有限の値をとるとき，$f(x)$ は $[a, b]$ で**積分可能**であるといい，a を**上端**，b を**下端**，$f(x)$ を**被積分関数**という．

また，一般の区間 $I \subset \mathbb{R}$ では

$$\int_I f(x) \mathrm{d}x$$

とあらわす．

定理 2.1

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ について，定数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を用いて閉区間 $I \subset\in \mathbb{R}$ に対する定積分について

$$\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x)) \mathrm{d}x = \alpha \int_I f(x) \mathrm{d}x + \beta \int_I g(x) \mathrm{d}x$$

が成り立つ．これは定積分が線型性をもつことを示している．

Proof.

定積分の定義より

$$\begin{aligned}\int_I(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x &= \lim_{\Delta x_k\to 0}\sum_{k=1}^{n}(\alpha f(x)+\beta g(x))\Delta x_k\\ &= \lim_{\Delta x_k\to 0}\alpha\sum_{k=1}^{n}f(x)\Delta x_k+\lim_{\Delta x_k\to 0}\beta\sum_{k=1}^{n}g(x)\Delta x_k\\ &=\alpha\int_I f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_I g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

となる．

よって，命題は証明された．

□

また，定積分の定義より，閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ での定積分について

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

が成り立つことは自明である．特に $f(x)$ が定数 c による定数関数であるとき，定積分は面積であることから

$$\int_a^b c\mathrm{d}x=(b-a)c$$

とあらわされる．

ここで，以下の定理を与える．

定理 2.2　平均値の定理

独立変数 $x\in\mathbb{R}$ による関数 $f(x)\in\mathbb{R}$ が閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ で連続であるとき

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(c)$$

を満たす $c\in(a,b)$ が存在する．これを定積分に関する**平均値の定理**という．

Proof.

$f(x)$ の $[a,b]$ における最大値を M，最小値を m とすれば

$$m\le f(x)\le M$$

であるため，これらを $[a,b]$ で定積分をとることにより

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a)$$
$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M$$

が得られ，$f(x)$ の $[a,b]$ における連続性より命題を満たす $c\in(a,b)$ は存在する．

よって，命題は証明された．

□

定理 2.3　微分積分学の基本定理

独立変数 $x\in\mathbb{R}$ による $f(x)\in\mathbb{R}$ が区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上で連続であるとき，任意定数 $a\in I$ および $x\in I$ に対して関数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

を定義すれば

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

が成り立ち，これを**微分積分学の基本定理**という．

また，$F(x)$ のことを $f(x)$ の**不定積分**もしくは**原関数**という．

Proof.

$F(x)$ の導関数を求める．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

定積分に関する平均値の定理より $c\in(x,x+h)$ を用いて $h\to 0$ で $c\to x$ となることを用いることで

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\mathrm{d}t&=\lim_{h\to 0}f(c)\\&=\lim_{c\to x}f(c)\\&=f(x)\end{aligned}$$

となり，等式が得られる．

よって，命題は証明された．

□

微分積分学の基本定理より，定積分は被積分関数とその積分区間のみによって決まり，定数 C を用いて

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)+C$$

のように考えることができる．$x=a$ とすれば $0=F(a)+C$ となり，$C=-F(a)$ となることがわかる．よって，$f(x)$ の $[a,b]$ に対する定積分は

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

のようにして求めることができる．

また，不定積分を求める方法は定積分の記号を略することによって任意定数 C を用いて

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

とあらわされる．また，定数 C のことを**積分定数**という．

2.2　置換積分法

定理 2.4

独立変数 $x\in\mathbb{R}$ による関数 $f(x)\in\mathbb{R}$ を閉区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ で定積分をするとき，$t=\varphi(x)\in\mathbb{R}$ とすれば

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}f(t)\mathrm{d}t$$

が成り立つ．これを**置換積分法**という．

Proof.

$F'(t) = f(t)$ とすれば連鎖律より

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

となり，

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t$$

が得られる．

よって，命題は証明された．

□

また，不定積分においても積分領域を省略することで同様のことを考えることができる．

2.3　部分積分法

定理 2.5

独立変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $f(x)g(x) \in \mathbb{R}$ を閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ で定積分をするとき，$G'(x) = g(x)$ とすれば

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x$$

が成り立つ．これを**部分積分法**という．

Proof.

連鎖律より

$$(f(x)G(x))' = f'(x)G(x) + f(x) + G'(x) = f'(x)G(x) + f(x)g(x)$$

となり

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)G(x))'\mathrm{d}x - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x$$

が得られる．

よって，命題は証明された．

□

また，不定積分においても積分領域を省略することで同様のことを考えることができる．