微分積分学 -微積分の公式-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 11 月 13 日

目次

第 1 章

初等関数の導関数と不定積分

1.1　三角関数

まず，三角関数の導関数および不定積分を導入するにあたって以下の補題を証明する．

補題 1.　三角関数の極限について以下の等式が成り立つ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\operatorname{sinc} 0 = 1$$

また，$\frac{\sin x}{x}$ で $x \to 0$ を *1* と定義した関数を sinc 関数という．

Proof.

半径 r の $(0, \frac{\pi}{2})$ の 中心角 x の扇形の面積について以下の不等式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}r^2\sin x < \frac{1}{2}r^2 x < \frac{1}{2}r^2\tan x$$

これを変形することで命題の関係式を得る．

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ここで $x \to 0$ の極限をとる．

$$1 \leq \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} \leq \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$$

はさみうちの原理より，$x \to 0$ で $\frac{x}{\sin x} = 1$ となり，極限値の逆数をとることで命題が証明された．

□

三角関数の導関数と不定積分

三角関数の導関数と不定積分について以下の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
(\sin x)' = \cos x \ &\Leftrightarrow\ \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C \\
(\cos x)' = -\sin x \ &\Leftrightarrow\ \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C \\
(\tan x)' = \sec^2 x \ &\Leftrightarrow\ \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C \\
(\cot x)' = -\csc^2 x \ &\Leftrightarrow\ \int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C \\
(\sec x)' = \sec x \tan x \ &\Leftrightarrow\ \int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C \\
(\csc x)' = -\csc x \cot x \ &\Leftrightarrow\ \int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C
\end{aligned}$$

Proof.

微分積分学の基本定理により導関数を証明することで不定積分は自動的に証明される．

導関数の定義より，$\sin x$ の導関数を計算する．

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\\ &= \cos x\end{aligned}$$

$\cos x$ の導関数も同様に計算する．

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}\\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\\ &= -\sin x\end{aligned}$$

その他の関数は積の導関数の性質を用いることで計算する．

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\\ (\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x\\ (\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\tan x\\ (\csc x)' &= \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x\cot x\end{aligned}$$

よって命題は証明された．

□

1.2　逆三角関数

逆三角関数の導関数と不定積分

逆三角関数の導関数と不定積分について以下の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}(\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\Leftrightarrow&\quad \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \sin^{-1} x + C\\ (\cos^{-1} x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &\Leftrightarrow&\quad \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\cos^{-1} x + C\\ (\tan^{-1} x)' &= \frac{1}{x^2+1} &\Leftrightarrow&\quad \int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \tan^{-1} x + C\\ (\cot^{-1} x)' &= -\frac{1}{x^2+1} &\Leftrightarrow&\quad \int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = -\cot^{-1} x + C\\ (\sec^{-1} x)' &= \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}} &\Leftrightarrow&\quad \int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}}\mathrm{d}x = \sec^{-1} x + C\\ (\csc^{-1} x)' &= -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}} &\Leftrightarrow&\quad \int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}}\mathrm{d}x = -\csc^{-1} x + C\end{aligned}$$

Proof.

微分積分学の基本定理により導関数を証明することで不定積分は自動的に証明される．

逆三角関数は三角関数の逆関数であることから，逆関数の導関数より，以下のようになる．また，三角関数と逆三角関数の合成式の値は単位円より三平方の定理を用いることで幾何学的に解釈することができる．

$$
\begin{aligned}
(\sin^{-1} x)' &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\cos^{-1} x)' &= \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\tan^{-1} x)' &= \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y = \cos^2(\tan^{-1} x) = \frac{1}{x^2+1} \\
(\cot^{-1} x)' &= \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)' = -\frac{1}{x^2+1} \\
(\sec^{-1} x)' &= \frac{1}{(\sec y)'} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{\pm x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}} \\
(\csc^{-1} x)' &= \left(\frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x\right)' = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}}
\end{aligned}
$$

よって，命題は証明された．

□

1.3　指数・対数関数

指数関数 $y = a^x$ の導関数を求めることを考える．

$$
(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}
$$

このとき，$\frac{a^h-1}{h}$ が $h \to 0$ で 1 になるとすれば，この指数関数の導関数は元の関数と一致する．よって，以下の定義を与えることができる．

定義 1.

定数 e において，以下の等式を満たすものを**自然対数の底**もしくは**ネイピア数**という．

$$
\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1
$$

また，e は以下のようにあらわすことができる．

$$
\begin{aligned}
e &= \lim_{h\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}
\end{aligned}
$$

e を底とする指数関数を**自然指数関数**といい，e を底とする対数関数を**自然対数**という．特に自然対数は $\log x$ や $\ln x$ とあらわす．

また，e は収束し，無理数である．

Proof.

まずは e の冪級数表示について示す．元の定義式を以下のように変形する．

$$\begin{aligned} e^h - 1 =& h \\ e^h =& h + 1 \\ \log(h+1) =& h \\ \log(h+1)^{\frac{1}{h}} =& 1 \\ (h+1)^{\frac{1}{h}} =& e \end{aligned}$$

よって，$h \to 0$ とすることで等式が示される．また，$h = \frac{1}{k}$ とすれば，以下のようにあらわすことができる．

$$e = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$$

これを二項定理によって展開することで級数であらわされる．

$$\begin{aligned} e =& \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \frac{1}{k^n} \\ =& \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \frac{1}{k^n} \\ =& \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!k^n} \prod_{i=1}^{n} (k - n + i) \\ =& \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{n-i}{k}\right) \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

次に収束性について証明する．$x \in \mathbb{R}$ で $n \to \infty$ のとき，$x^n < n!$ が成り立つことから以下の関係式が成り立ち，収束性が証明される．

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

最後に無理数であることについて証明する．$a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ で $e = \frac{a}{b}$ とあらわされると仮定する．このとき以下のような操作をする．

$$b!e = (b-1)!a = b! \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!} + b! \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

このとき，$(b-1)!a$ は仮定より自然数であり，右辺の級数部の左項も自然数の和であることから自然数である．よって，右辺の級数部の右項も自然数でなければならない．このとき，収束性の証明と同様に右項を評価をする．

$$\begin{aligned} b! \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{n!} =& \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \cdots \\ <& \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)^2} + \cdots \\ <& \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \\ =& \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1 \end{aligned}$$

1 未満であることは自然数でないことから仮定に矛盾する．よって，e は無理数である．

□

自然指数関数と自然対数の導関数と不定積分

自然指数関数と自然対数の導関数と不定積分について以下の関係式が成り立つ．

$$(e^x)' = e^x \iff \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$
$$(\log x)' = \frac{1}{x} \iff \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log x + C$$

Proof.

微分積分学の基本定理により導関数を証明することで不定積分は自動的に証明される．

自然指数関数はネイピア数の定義より自明である．また，自然対数は $y = \log x$ とおいたとき，$x = e^y$ であることから，逆関数の導関数より以下のようになる．

$$(\log x) = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

よって，命題は証明された．

□

指数関数と対数関数の導関数と不定積分

a を底とする指数関数と対数関数の導関数と不定積分について以下の関係式が成り立つ．

$$(a^x)' = a^x \log a \iff \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a} + C$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a} \iff \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \log_a x \log a + C = \log x + C$$

Proof.

微分積分学の基本定理により導関数を証明することで不定積分は自動的に証明される．

指数関数は $a^x = e^{x \log a}$ となることから以下のようになる．

$$(a^x)' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$$

また，対数関数は底の変換式から以下のようになる．

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{x \log a}$$

よって，命題は証明された．

□

また，自然対数における不定積分で以下の定理が成り立つ．

分数関数における不定積分

関数 $f(x)$ について，以下の不定積分の公式が成り立つ．

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \log f(x) + C$$

Proof.

$u = f(x)$ と置換することで以下のようになり，命題が証明される．

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)} = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \log u + C = \log f(x) + C$$

□

1.4　冪関数

冪関数の導関数と不定積分

冪関数の導関数と不定積分について以下の関係式が成り立つ．

$$(x^a)' = ax^{a-1} \ \Leftrightarrow \ \int x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

なお，不定積分においては $a \neq -1$ である．

Proof.

微分積分学の基本定理により導関数を証明することで不定積分は自動的に証明される．

一般の冪関数は，$x^a = e^{a \log x}$ と定義されるため，連鎖律より以下のようになる．

$$(x^a)' = (e^{a \log x})' = ae^{a \log x}\frac{1}{x} = ax^a\frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

よって，命題は証明された．

□

1.5　双曲線関数

双曲線関数の導関数と不定積分

双曲線関数の導関数と不定積分について以下の関係式が成り立つ．

$$(\sinh x)' = \cosh x \ \Leftrightarrow \ \int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \ \Leftrightarrow \ \int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \ \Leftrightarrow \ \int \frac{1}{\cosh^2 x}\mathrm{d}x = \tanh x + C$$

Proof.

微分積分学の基本定理により導関数を証明することで不定積分は自動的に証明される．

双曲線関数は指数関数を用いて定義されるため，これを用いて計算する．

$$(\sinh^x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh^x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$\tanh x$ の導関数に関しては連鎖律より証明する．

$$(\tanh^x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh^2 - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

よって，命題は証明された．

□

1.6 逆双曲線関数

逆双曲線関数の導関数と不定積分

逆双曲線関数の導関数と不定積分について以下の関係式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
(\sinh^{-1} x)' =& \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x = \sinh^{-1} x + C \\
(\cosh^{-1} x)' =& \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \mathrm{d}x = \cosh^{-1} x + C \\
(\tanh^{-1} x)' =& \frac{1}{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = \tanh^{-1} x + C
\end{aligned}
$$

Proof.

微分積分学の基本定理により導関数を証明することで不定積分は自動的に証明される．

逆双曲線関数を対数表示にすることで導関数を計算する．

$$
\begin{aligned}
(\sinh^{-1} x)' =& \left(\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1+\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
(\cosh^{-1} x)' =& \left(\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{(x+\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\
(\tanh^{-1} x)' =& \frac{1}{2}\left(\log\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{-1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

よって，命題は証明された．

□

第 2 章

積分法に関する解法および公式

2.1 多項式分数関数

$n, m \in \mathbb{N}$ で $n < m$ が成り立つとき，定数 a_i, b_j による以下のような多項式分数関数の不定積分を考える．

$$\int \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^2}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \mathrm{d}x$$

また，$n \geq m$ のときは分子を分母で割ることで商と余りの和であらわされ $n < m$ に帰着される．

分母の多項式において，これが因数分解可能であれば，それによる部分分数分解をすることで不定積分をすることが可能である場合がある．以下に例を示す．

例　以下の関数 $f(x)$ の不定積分を導く．

$$f(x) = \frac{5x^4 + 9x^3 + 3x^2 + 7x + 12}{(x^2+3)(x^2-1)(4x+5)}$$

$f(x)$ の分母は 5 次式で分子は 4 次式のため，このまま計算が考えることができる．このとき，$f(x)$ は定数 A, B, C, D, E を用いて以下のように部分分数分解ができると考えられる．

$$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2-1} + \frac{E}{4x+5}$$

これを部分分数分解する前とした後のもので連立することで，それぞれの定数を求める．A, B を求める際には両辺に x^2+3 をかけて x に $\sqrt{3}i$ を代入することで C, D, E を含む項は除去される．

$$\begin{aligned}
\left.\frac{5x^4 + 9x^3 + 3x^2 + 7x + 12}{(x^2-1)(4x+5)}\right|_{x=\sqrt{3}i} &= (Ax+B)|_{x=\sqrt{3}i} \\
\frac{45 - 27\sqrt{3}i - 9 + 7\sqrt{3}i + 12}{-4(4\sqrt{3}i+5)} &= A\sqrt{3}i + B \\
\frac{48 - 20\sqrt{3}i}{-4(4\sqrt{3}i+5)} &= A\sqrt{3}i + B \\
\frac{5\sqrt{3}i - 12}{(4\sqrt{3}i+5)} &= A\sqrt{3}i + B \\
\frac{-23\sqrt{3}i}{(25-48)} &= A\sqrt{3}i + B \\
A\sqrt{3}i + B &= \sqrt{3}i
\end{aligned}$$

よって，$A = 1, B = 0$ となる．同様にして，$C = 0, D = 1, E = 1$ となる．以上より，不定積分は以下のようになる．

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x}{x^2+3} + \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{4x+5} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(x^2+3) - \tanh^{-1} x + \frac{1}{4}\log(4x+5)$$

2.2　偶関数と奇関数の定積分

偶関数と奇関数の定積分

閉区間 $[-a, a]$ で $f(x)$ の定積分をとるとき，$f(x)$ が偶関数であるならば以下が成り立つ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

また，$f(x)$ が奇関数であるならば以下が成り立つ．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

Proof.

$f(x)$ が偶関数であるとき $f(x) = f(-x)$ のため，以下のようになる．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

また，$f(x)$ が奇関数であるとき $f(x) = -f(-x)$ のため．以下のようになる．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

よって，命題が証明された．

□

一般の偶関数でも奇関数でもない $f(x)$ を考える．$f(x)$ は以下のように偶関数と奇関数に分解が可能である．

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

これより，定積分は以下のようになる．

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} (f(x) + f(-x))\mathrm{d}x$$

2.3　ウォリス積分

ウォリス積分

$n \in \mathbb{N}$ を用いた定積分において以下の関係式が成り立つ．

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n\ is\ even) \\ \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{2}{3} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} & (n\ is\ odd) \end{cases}$$

これを**ウォリス積分**という．

Proof.

定理が示す定積分を I_n とおいて，それを部分積分することで証明をする．

$$
\begin{aligned}
I_n =& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \mathrm{d}x \\
=& \left[\sin^{n-1} x(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
=& (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x \\
=& (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\
I_n =& \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}
$$

この積分は計算上の仮定より，$n \leq 2$ である必要がある．このとき偶数と奇数で以下の 2 つの場合が考えられる．

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 \\
I_n &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} I_1
\end{aligned}
$$

n が 0 および 1 のときは単なる定積分であるため，直ちに求めることができる．

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \\
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \mathrm{d}x = 1
\end{aligned}
$$

また，$\cos^n x$ に関する式と等しいことは以下のようにして求めることができる．

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(-x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

よって，命題が証明された．

□

2.4　定積分に関する不等式

関数の不等式

関数 $f(x), g(x)$ において，閉区間 $[a,b]$ で $f(x) \leq g(x)$ が成り立つとき，以下の不等式が成立する．

$$
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x
$$

また，等号成立条件は $[a,b]$ で $f(x) = g(x)$ となることである．

Proof.
リーマン積分の定義から自明である．

□

定積分の三角不等式

関数 $f(x)$ を閉区間 $[a,b]$ で定積分するとき，以下の不等式が成立する．

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

また，等号成立条件は $[a,b]$ で $f(x)$ の符号が一致することである．

Proof.

リーマン積分の定義から，三角不等式の一次元ベクトルの項数を無限大にしたものと一致するため命題は証明された．

□

定積分のシュワルツの不等式

関数 $f(x), g(x)$ において，閉区間 $[a,b]$ で定積分をするとき，以下の不等式が成立する．

$$\left(\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b (g(x))^2\,\mathrm{d}x\right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

また，等号成立条件は $f(x)=0$ か $g(x)=0$ が成り立つことか，$f(x)=kg(x)$ を満たす定数 k が存在することである．

Proof.

リーマン積分の定義から，シュワルツの不等式のベクトルの次元を無限大にしたものと一致するため命題は証明された．

□