極限 -数列の極限-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

初回更新 2018 年 12 月 24 日
最終更新 2018 年 12 月 24 日

目次

第 1 章　数列　1
1.1　数列の定義　1
1.2　特殊な数列　2
1.3　差分　4

第 2 章　数列の極限　6
2.1　イプシロン・エヌ論法　6
2.2　数列の極限の性質　8
2.3　コーシー列　12
2.4　級数　15

第 1 章

数列

1.1 数列の定義

定義 1.

整列された添字集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ から $\mathbb{R}$ への関数 a を**実数列**という．$n \in I$ で $a(n)$ を a_n とあらわし，これを n について整列させることで

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

とあらわすことができ，このとき数列は $\{a_n\}$ とあらわされる．

また，数列の各々の数を**項**といい，特に a_1 を**初項**，a_n が n についての式であらわされたものを**一般項**という．a_n がそれ以前の項により帰納的関係式が与えられたとき，その関係式を a_n の**漸化式**といい，関数 f により

$$a_{n+1} = f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

と与えられたものである．このとき，a_n は漸化式とその初期値によって与えられる．

項の数が有限である数列を**有限数列**，無限大である数列を**無限数列**という．

数列の定義により，以下の最も基本的な補題が与えられる．

補題 1. 任意の有限数列は有界である．

Proof.

有限数列 $\{a_n\}$ を与えたとき

$$M = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$
$$M' = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

となる M', M を与えれば，$1 \leq k \leq n$ で

$$M' \leq a_k \leq M$$

となるため $\{a_n\}$ は有界である．

よって，命題は証明された．

□

また，数列の第 n 項までの和を考えることがあるため，以下の定義を与える．

定義 2.

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和を**第 n 部分和**もしくは**有限級数**といい，分部和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

とあらわされ，このとき $\sum$ を**シグマ**という．また，必要に応じてシグマの添字を略することがある．

このとき，$\sum$ の計算について以下の性質が成り立つ．

$\sum$ の計算の性質

数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ および定数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ の $\sum$ の計算について，以下の性質を満たす．

$$\cdot \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{k=1}^{n}a_n+\beta\sum_{k=1}^{n}b_n$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{n}\alpha=\alpha n$$

Proof.

第 1 式は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_n+\beta b_n)=&(\alpha a_1+\beta b_1)+(\alpha a_2+\beta b_2)+\cdots+(\alpha a_n+\beta b_n)\\=&\alpha(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\beta(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\=&\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k+\beta\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

となり成り立つことがわかる．

第 2 式も同様にして

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha=\underbrace{\alpha+\alpha+\cdots+\alpha}_{n\text{ 個}}=\alpha n$$

となり等式が得られる．

よって，命題は証明された．

□

1.2　特殊な数列

定義 3.

数列のうち，初項 a で定数 b により

$$a,a+b,a+2b,\cdots,a+(n-1)b,\cdots$$

と与えられるものを**等差数列**といい，この数列の第 n 項を a_n とすることで漸化式は

$$\begin{cases}a_1=a\\a_{n+1}=a_n+b\end{cases}$$

となる．このとき，b を等差数列の**公差**という．

ここで，初項 a 公差 b の $a_n=a+(n-1)b$ とあらわされる等差数列 $\{a_n\}$ の部分和 S_n について考える．$\sum$ の計算の性質により

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a+(k-1)b)=\sum_{k=1}^{n}a+b\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}b=n(a-b)+b\sum_{k=1}^{n}k$$

となり，等差数列の和を求めるには

$$\sum_{k=1}^{n}k$$

を求める必要がある．

そこで，$\sum$ に関する基本的な公式を与える．

$\sum$ の公式

$\sum$ について以下の公式が成り立つ．

$$\cdot \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Proof.

第 1 式を S_n とおいたとき

$$\begin{aligned} 2S_n =&(1+2+\cdots+n)+(n+(n-1)+\cdots+1) \\ =&n(n+1) \\ S_n =&\frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

となり，等式が示される．

第 2 式は $(k+1)^3$ を展開したとき

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

となることおよび

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3-k^3)=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^3=(n+1)^3-1$$

となることを用いることにより，

$$\begin{aligned} (n+1)^3-1 =&3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n \\ 3\sum_{k=1}^{n}k^2 =&(n+1)^3-1-3\sum_{k=1}^{n}k-n \\ =&(n+1)^3-1-\frac{3}{2}n(n+1)-n \\ =&n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n \\ =&n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n \\ =&\frac{1}{2}(2n^3+3n^2+n) \\ \sum_{k=1}^{n}k^2 =&\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

となり，等式が示された．

よって，命題は証明された．

□

定義 4.

初項 1 で定数 r により

$$1, r, r^2, \cdots, r^{n-1}, \cdots$$

と与えられる数列を**等比数列**といい，この数列の第 n 項を a_n よすることで漸化式は

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = ra_n \end{cases}$$

となる．このとき r を等比数列の**公比**という．

このとき，等比数列の部分和について以下の公式が成り立つ．

等比数列の部分和

公比 r による $a_n = r^{n-1}$ とあらわされる等比数列 $\{a_n\}$ の部分和 S_n について

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} r^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-r^n}{1-r} & (r \neq 0) \\ n & (r = 0) \end{cases}$$

が成り立つ．

Proof.

$r = 0$ のときは明らかである．

$r \neq 0$ のとき，S_n と rS_n の差について

$$\begin{aligned} S_n - rS_n =& (1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) - (r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n) \\ S_n(1-r) =& 1 - r^n \\ S_n =& \frac{1-r^n}{1-r} \end{aligned}$$

となり，等式が得られる．

よって，命題は証明された．

□

1.3　差分

定義 5.

数列 $\{a_n\}$ により $n \leq 2$ で

$$a_{n+1} - a_n$$

とあらわされるものを n 項目の**前進差分**もしくは**前進階差**といい，$\overline{\Delta} a_n$ もしくは単に Δa_n とあらわす．これに対し

$$a_n - a_{n-1}$$

とあらわされるものを n 項目の**後進差分**もしくは**後進階差**といい，$\underline{\Delta} a_n$ もしくは単に Δa_n とあらわす．

それぞれの前進差分と後進差分は単に**差分**ということもあり，差分により定義される数列を**階差数列**という．このような数列は帰納的に定義可能であり，Δa_n の階差数列を**第 2 階差数列**といい，$\Delta^2 a_n$ とあらわす．同様にして，第 n 階差数列は $\Delta^n a_n$ とあらわす．

ここで，数列の部分和に関する以下の定理を与える．

数列の部分和と一般項の関係

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの部分和 S_n が与えられたとき，a_n と S_n には

$$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = \underline{\Delta} S_n \end{cases}$$

が成り立つ．

Proof.

第 1 式は自明である．第 2 式は

$$\underline{\Delta} S_n = S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = a_n$$

となり等式が得られる．

よって，命題は証明された．

□

また，漸化式が $\{a_n\}$ の階差数列と数列 $f(n)$ によって

$$\begin{cases} a_1 = c \\ \Delta a_n = a_{n+1} - a_n = f(n) \end{cases}$$

と与えられたとき，

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = -a_1 + a_n$$

となることから

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \end{cases}$$

とあらわすことができる．

第 2 章

数列の極限

2.1 イプシロン・エヌ論法

数列 $\{a_n\}$ において，n が無限に大きくなったときの振る舞いについて考える．このとき，ある値に近づくのか，無限に大きくなるのか，無限に小さくなるのかということが考えられる．

ここで，以下の補題を与える．

補題 2. $a, b \in \mathbb{R}$ が与えられたとき，

$$\forall \varepsilon > 0 \ s.t. \ |a-b| < \varepsilon$$

が真であるならば $a = b$ である．

Proof.

$a \neq b$ と仮定して $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ とすれば $\varepsilon > 0$ である．このとき，仮定より

$$|a-b| < \varepsilon$$

であるが，

$$|a-b| - \varepsilon < 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}|a-b| < 0$$

となり，実数における絶対値が正であることに矛盾するため $a = b$ である．

よって，命題は証明された．

□

この補題により，実数における等価であることが定式化された．これにより，n が無限に大きくなったときにある値に近づくとき，この補題を満たすということである．

これより，以下の定義を与えることができる．

定義 6.

数列 $\{a_n\}$ において，n が無限に大きくすることを**極限**といい，このときある値 α に近づくとき，$\{a_n\}$ は α に**収束**するといい，これは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \ s.t. \ \forall m \in \mathbb{N}(m > n), |a_m - \alpha| < \varepsilon$$

と定義される．これを**イプシロン・エヌ論法**という．また，数列が収束しないことを**発散**という．

このとき，n がある値 m に近づくということを $n \to m$ とあらわし，$\{a_n\}$ が α に収束することは

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \ or \ a_n \to \alpha (n \to \infty)$$

とあらわす．また，極限により収束する値を**極限値**という．

ここで，収束する数列の基本的な補題および定理が与えられる．

補題 3. 任意の収束する数列は有界である．

Proof.

数列 $\{a_n\}$ を与え，これが α に収束するとき

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}\ s.t.\ \forall m\in\mathbb{N}(m>n),|a_m-\alpha|<\varepsilon\\ \Rightarrow\ &\alpha-\varepsilon<a_m<\alpha+\varepsilon\end{aligned}$$

となることから $n>m$ で有界である．また，m は有限であることから $n<m$ においても有界である．

よって，命題は証明された．

□

この補題は収束する数列は有界であるが，この逆は成り立たない．このように，有界であるが収束しない数列のことを**振動**するという．

また，数列が有界であることに対して制約条件を設けることによって数列が収束するということをいえる．

そこで，以下の補題を与える．

補題 4.　数列が有界な単調増加列もしくは単調減少列であるとき収束する．

Proof.

まずは，数列 $\{a_n\}$ が単調増加列の場合を示す．仮定より，$A=\{a_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ を定義したとき $b=\sup A$ が存在し，

$$\forall n\in\mathbb{N},a_n\leq b$$

である．また，$\{a_n\}$ は単調増加列であることから

$$\exists n\in\mathbb{N},\forall m\in\mathbb{N}(m>n),a_n<a_m\leq b$$

が成り立つ．このとき a_n は $\varepsilon>0$ により $b-\varepsilon$ とあらわすことができるため

$$\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}\ s.t.\ \forall m\in\mathbb{N}(m>n),b-\varepsilon<a_m\leq b$$

となり，この a_m に関する部分を変形することにより

$$-\varepsilon<a_m-b\leq 0\ \Rightarrow\ |a_m-b|<\varepsilon$$

となり，これは $\{a_n\}$ が b に収束することを示している．$\{a_n\}$ が単調減少列でも同様である．

よって，命題は証明された．

□

極限値の一意性

数列が収束するとき，その極限値は一意である．

Proof.

数列 $\{a_n\}$ を与えれば，極限値 α が存在して

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_1\in\mathbb{N}\ s.t.\ \forall m\in\mathbb{N}(m>n_1),|a_m-\alpha|<\varepsilon$$

である．このとき，別の極限値 β が存在すれば

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_2\in\mathbb{N}\ s.t.\ \forall m\in\mathbb{N}(m>n_2),|a_m-\alpha|<\varepsilon$$

である．三角不等式により

$$|\alpha-\beta|=|(a_n-\alpha)+(\beta-a_n)|\leq|a_n-\alpha|+|\beta-a_n|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

となり，

$$\forall\varepsilon>0\ s.t.\ |\alpha-\beta|<2\varepsilon$$

が得られ，これは真であるため $\alpha=\beta$ である．

よって，命題は証明された．

□

2.2　数列の極限の性質

はさみうちの原理

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が与えられたとき，十分大きい n で $a_n \leq b_n \leq c_n$ となるとする．$n \to \infty$ で $a_n \to \alpha$ かつ $c_n \to \alpha$ であるとき $b_n \to \alpha$ である．これを**はさみうちの原理**という．

Proof.

仮定より

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_a \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_a), |a_m - \alpha| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_c \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_c), |c_m - \alpha| < \varepsilon$$

である．$n_a < n$ かつ $n_c < n$ となるように n_b を選択し，$m > n_b$ で

$$a_m > \alpha - \varepsilon, \quad c_m < \alpha + \varepsilon$$

となることから

$$a_m \leq b_m \leq c_m \ \Rightarrow\ \alpha - \varepsilon < b_m < \alpha + \varepsilon \ \Rightarrow\ |b_m - \alpha| < \varepsilon$$

となり，$n \to \infty$ で $b_n \to \alpha$ となる．

よって，命題は証明された．

□

極限値における四則演算

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が $n \to \infty$ において $a_n \to \alpha$ および $b_n \to \beta$ であるとする．このとき，極限値における四則演算について，定数 $c \in \mathbb{R}$ を用いるとしたとき，以下を満たす．

- $\displaystyle\lim_{n \to \infty} ca_n = c\alpha$
- $\displaystyle\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$
- $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n b_n = \alpha\beta$
- $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

なお，商の極限値に関しては $\beta \neq 0$ であるとする．

Proof.

第 1 式について，$c = 0$ のときは自明であるため $c \neq 0$ と仮定する．ここで，

$$\forall \frac{\varepsilon}{|c|} > 0, \exists n_a \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_a), |a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

が成り立つため，任意の $\varepsilon > 0$ に対する n で $m > n$ のとき

$$|ca_m - c\alpha| = |c||a_m - \alpha| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

となり，第 1 式が成り立つことが示される．

第 2 式について，仮定より

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_a \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_a), |a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_b \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_b), |b_m - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つため，$n = \max\{n_a, n_b\}$ とおくことにより

$$m > n \ \Rightarrow\ |a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, |b_m - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる．このとき，三角不等式により

$$|(a_m + b_m) - (\alpha + \beta)| = |(a_m - \alpha) + (b_m - \beta)| \leq |a_m - \alpha| + |b_m - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

および

$$|(a_m - b_m) - (\alpha - \beta)| = |(a_m - \alpha) + (\beta - b_m)| \leq |a_m - \alpha| + |\beta - b_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が得られ，第 2 式が成り立つことが示される．

第 3 式について，仮定より

$$\forall \varepsilon_a > 0, \exists n_a \in \mathbb{N} \ s.t. \ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_a), |a_m - \alpha| < \varepsilon_a$$
$$\forall \varepsilon_b > 0, \exists n_b \in \mathbb{N} \ s.t. \ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_b), |b_m - \beta| < \varepsilon_b$$

が成り立つため，$n = \max\{n_a, n_b\}$ とおくことにより

$$m > n \ \Rightarrow \ |a_m - \alpha| < \varepsilon_a, |b_m - \beta| < \varepsilon_b$$

となる．このとき，三角不等式により

$$|a_m b_m - \alpha\beta| = |(a_m b_m - a_m\beta) + (a_m\beta - \alpha\beta)| \leq |a_m||b_m - \beta| + \beta|a_m - \alpha| < |a_m|\varepsilon_b + |\beta|\varepsilon_a$$

であるため

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon}{2|\beta|} > 0, \quad \varepsilon_b = \frac{\varepsilon}{2|a_m|} > 0$$

とおくことにより

$$|a_m b_m - \alpha\beta| = |a_m|\frac{\varepsilon}{2|a_m|} + |\beta|\frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon$$

となり，第 3 式が成り立つことが示される．

第 4 式について，第 3 式を用いることにより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$$

となることを示せばいい．このとき，仮定より

$$\forall \varepsilon_b > 0, \exists n_b \in \mathbb{N} \ s.t. \ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_b), |b_m - \beta| < \varepsilon_b$$

であるため

$$\left|\frac{1}{b_m} - \frac{1}{\beta}\right| = \left|\frac{\beta - b_m}{b_m\beta}\right| = \frac{|\beta - b_m|}{|b_m\beta|} < \frac{\varepsilon_b}{|b_m\beta|}$$

となる．ここで，

$$\varepsilon_b = |b_m\beta|\varepsilon > 0$$

とおくことにより

$$\left|\frac{1}{b_m} - \frac{1}{\beta}\right| < \frac{|b_m\beta|\varepsilon}{|b_m\beta|} = \varepsilon$$

となり，第 4 式が成り立つことが示される．

よって，命題は証明された．

□

補題 5.　数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が十分大きな n で $a_n \leq b_n$ であるとしたとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

である．

Proof.

$n \to \infty$ で $a_n \to \alpha$ および $b_n \to \beta$ であるとして，$\alpha > \beta$ であるとする．仮定より

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \ s.t. \ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_a), |a_m - \alpha| < \varepsilon$$

であることから $\varepsilon = \frac{\alpha-\beta}{2}$ で

$$m > n_a \ \Rightarrow \ |a_m - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2} \ \Rightarrow \ a_m - \alpha > -\frac{\alpha-\beta}{2} \ \Rightarrow \ a_m > \frac{\alpha+\beta}{2}$$

となり，同様にして ε に対してある n_b が存在して

$$m > n_b \ \Rightarrow \ |b_m - \beta| < \frac{\alpha-\beta}{2} \ \Rightarrow \ b_m - \beta < \frac{\alpha-\beta}{2} \ \Rightarrow \ b_m < \frac{\alpha+\beta}{2}$$

となる．$n = \max\{n_a, n_b\}$ をとることにより，$m > n$ で

$$b_m < \frac{\alpha+\beta}{2} < a_m$$

となり，$a_n \leq b_n$ に矛盾するため $\alpha \leq \beta$ である．

よって，命題は証明された．

□

ここで，イプシロン・エヌ論法を用いずに極限を考えることができるようにいくつか具体的な極限値を与える．

補題 6.　数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ で $a_n \to \infty$ であるとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

が成り立つ．

Proof.

a_n は無限大に発散するためイプシロン・エヌ論法は

$$\forall \varepsilon_a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \ s.t. \ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_a), |a_m| > \varepsilon_a$$

とあらわすことができる．このとき，

$$\left|\frac{1}{a_m} - 0\right| = \frac{1}{|a_m|} < \frac{1}{\varepsilon_a}$$

となり，

$$\varepsilon_a = \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

とすることで

$$\left|\frac{1}{a_m} - 0\right| < \varepsilon$$

となり，$n \to \infty$ で $\frac{1}{a_n} \to 0$ となることが示される．

よって，命題は証明された．

□

補題 7.　数列 $\{a_n\}$ が $a_n > 0$ かつ $n \to \infty$ で $a_n \to 0$ であるとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

が成り立つ．

Proof.

仮定より

$$\forall \frac{1}{\varepsilon} > 0, \exists n \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_a), |a_m| < \frac{1}{\varepsilon}$$

であり，

$$\varepsilon < \frac{1}{|a_m|}$$

となることから $n \to \infty$ で $\frac{1}{a_m} \to \infty$ である．

よって，命題は証明された．

□

補題 8.　数列 $\{a_n\}$ が収束する必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \alpha$$

となる極限値 α が存在することである．これは $\alpha = \pm\infty$ のときにも無限大に発散するという意味で適用可能である．

Proof.

α が実数のときを示す．必要性について，$n \to \infty$ で $a_n \to \infty$ とすれば

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m \in \mathbb{N}(m > n), |a_m - \alpha| < \varepsilon$$

であるため，$n_1 \geq \frac{n+1}{2}$ となるように n_1 を定めれば

$$m > n_1 \ \Rightarrow\ m > n_1 \geq \frac{n+1}{2} \ \Rightarrow\ 2m-1 > 2n_1 - 1 \geq n \ \Rightarrow\ |a_{2m-1} - \alpha| < \varepsilon$$

となり，$n \to \infty$ で $a_{2n-1} \to \infty$ であることが示される．同様にして，$n_2 \geq \frac{n}{2}$ となるように n_2 を定めれば

$$m > n_2 \ \Rightarrow\ m > n_1 \geq \frac{n}{2} \ \Rightarrow\ 2m > 2n_1 \geq n \ \Rightarrow\ |a_{2m} - \alpha| < \varepsilon$$

となり，$n \to \infty$ で $a_{2n} \to \infty$ であることが示される．

次に，十分性について示す．仮定より

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_1), |a_{2m-1} - \alpha| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m \in \mathbb{N}(m > n_2), |a_{2m} - \alpha| < \varepsilon$$

である．$n = \max\{2n_1 - 1, 2n_2\}$ とおいたとき $m > n$ で m が奇数，すなわち $k \in \mathbb{N}$ で $m = 2k-1$ とあらわすことができるとき

$$m = 2k - 1 > n \geq 2n_1 - 1 \ \Rightarrow\ k > n_1 \Rightarrow\ |a_m - \alpha| = |a_{2k-1} - \alpha| < \varepsilon$$

となり，同様にして m が偶数，すなわち $m = 2k$ とあらわすことができるとき

$$m = 2k > n \geq 2n_2 \ \Rightarrow\ k > n_2 \Rightarrow\ |a_m - \alpha| = |a_{2k} - \alpha| < \varepsilon$$

となり，m の偶奇によらず

$$m > n \ \Rightarrow\ |a_m - \alpha| < \varepsilon$$

であり，$n \to \infty$ で $a_n \to \alpha$ であることが示される．

$\alpha = \pm\infty$ の場合も同様である．

よって，命題は証明された．

□

補題 9.　定数 $r \in \mathbb{R}$ により $a_n = r^n$ とあらわされる数列 $\{a_n\}$ の極限について，以下が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & (|r| < 1) \\ 1 & (r = 1) \\ \infty & (1 < r) \\ \text{振動} & (r \leq -1) \end{cases}$$

Proof.

$r = 1$ のときは自明である．

$1 < r$ のとき，$h = r - 1 > 0$ とおけば二項定理より

$$r^n = (h+1)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq 1 + nh$$

とあらわされることから

$$\lim_{n\to\infty} (1 + nh) = \infty$$

となり，$n \to \infty$ で $r^n \to \infty$ となる．

$|r| < 1$ のとき，$h = \frac{1}{|r|} > 1$ となることから $n \to \infty$ で $h^n \to \infty$ となる．よって

$$\lim_{n\to\infty} = |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h^n} = 0$$

となる．

$r = -1$ のとき，$h = -r$ とおくことで

$$\lim_{n\to\infty} r^{2n} = \lim_{n\to\infty} (-h)^{2n} = \lim_{n\to\infty} h^{2n} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} r^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-h)^{2n-1} = -\lim_{n\to\infty} h^{2n-1} = -1$$

となり，発散する．同様にして $r < -1$ のときは

$$\lim_{n\to\infty} r^{2n} = \lim_{n\to\infty} (-h)^{2n} = \lim_{n\to\infty} h^{2n} = \infty$$
$$\lim_{n\to\infty} r^{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-h)^{2n-1} = -\lim_{n\to\infty} h^{2n-1} = -\infty$$

となり，発散する．

よって，命題は証明された．

□

2.3　コーシー列

まずは，数列の一部を抽出したものにおける概念を与える．

定義 7.

$n_k \in \mathbb{N}$ による狭義単調増加列 $\{n_k\}$ を与えたとき，数列 $\{a_n\}$ に対して $\{a_{n_k}\}$ を $\{a_n\}$ の**部分列**という．

ここで，有界な数列に対する定理を与えるために以下の補題を示す．

補題 10.　$n \in \mathbb{N}$ によりあらわされる区間 $I_n = [a_n, b_n]$ が $I_{n+1} \subseteq I_n$ を満たすならば全ての区間に共通する実数が存在する，すなわち

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

である．特に，$n \to \infty$ で $|a_n - b_n| \to 0$ ならばある *1* つの実数 α により

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$$

となり，$n \to \infty$ で $a_n \to \alpha$ かつ $b_n \to \alpha$ である．これを**区間縮小法**という．

Proof.

仮定より

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

が成り立ち，$\{a_n\}$ は有界な単調増加列，$\{b_n\}$ は有界な単調減少列であることから，それぞれは $n \to \infty$ で α および β に収束し，

$$\alpha \leq \beta$$

である．$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ および $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおけば $\alpha = \sup A$ および $\beta = \inf B$ であることから

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$$

であるため，$X = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ とおくことにより，全ての n で成り立つことから

$$X \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$$

が成り立つ．

$n \to \infty$ で $|a_n - b_n| \to 0$ となるとすれば，はさみうちの原理より $\alpha = \beta$ となり，$c \in \mathbb{R}$ を

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

の任意の元であるとすれば $a_n \leq c \leq b_n$ よりはさみうちの原理から $c = \alpha$ である．つまり，

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\alpha\}$$

となる．

よって，命題は証明された．

□

ボルツァーノ=ワイエルシュトラスの定理

有界な数列は収束する部分列をもつ．

Proof.

有界な数列 $\{a_n\}$ を与えれば，$m_1 < M_1$ を満たす m_1, M_1 で

$$m_1 \leq a_n \leq M_1$$

が成り立つ．$c_1 = \frac{m_1, M_1}{2}$ を与えれば，$[m_1, c_1]$ か $[c_1, M_1]$ のどちらかに無限個の a_n が含まれる．$[m_1, c_1]$ に無限個の a_n が含まれるとすれば

$$m_2 = m_1, \quad M_2 = c_1$$

とおき，$[c_1, M_1]$ に無限個の a_n が含まれるとすれば

$$m_2 = c_1, \quad M_2 = M_1$$

とおくような操作を繰り返すことにより

$$m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_n \leq m_{n+1} \leq \cdots \leq M_{n+1} \leq M_n \leq \cdots \leq M_2 \leq M_1$$

となるような数列 $\{m_n\}, \{M_n\}$ が構築される．また，このとき $\{m_n\}$ と $\{M_n\}$ はその構成法により

$$M_{n+1} - m_{m+1} = \frac{M_n + m_n}{2} = \frac{M_1 + m_1}{2^n}$$

を満たすことから，$n \to \infty$ で $|M_n - m_n| \to 0$ である．つまり，区間 $I_n = [m_n, M_n]$ は区間縮小法の仮定を満たすことから，ある実数 α に対して $n \to \infty$ で $m_n \to \alpha$ かつ $M_n \to \alpha$ となる．I_n には無限個の a_n が含まれていることから，$\{n_k\}$ は

$$a_{n_k} \in I_k$$

となるように選択することができる．このとき，

$$m_k \le a_{n_k} \le M_k$$

となるため，はさみうちの原理より $k \to \infty$ で $a_{n_k} \to \alpha$ となり，部分列 $\{a_{n_k}\}$ は収束する．

よって，命題は証明された．

□

定義 8.

数列 $\{a_n\}$ について

$$\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$$

が成り立つとき，$\{a_n\}$ を**コーシー列**もしくは**基本列**という．

ここで，コーシー列に関する補題を示す．

補題 11.　任意のコーシー列は有界である．

Proof.

コーシー列 $\{a_n\}$ を与えたとき

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m, n \in \mathbb{N}(m > N, n > N), |a_m - a_n| < \varepsilon$$

であるが，特に $\varepsilon = 1$ のとき

$$|a_{N+1} - a_n| < 1 \ \Rightarrow\ |a_n| < 1 + |a_{N+1}|$$

となるため

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, 1 + |a_{N+1}|\}$$

とすることで，$n > N$ であるため任意の n に対して

$$|a_n| < M$$

が得られる．

よって，命題は証明された．

□

収束する数列の必要十分条件

数列が収束する必要十分条件は，その数列がコーシー列であることである．

Proof.

まずは必要性を示す．数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとすれば

$$\forall\frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m \in \mathbb{N}(m > N), |a_m - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるため，$n > N$ となる任意の $n \in \mathbb{N}$ で三角不等式により

$$|a_m - a_n| = |(a_m - \alpha) + (\alpha - a_n)| \le |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となるため，$\{a_n\}$ はコーシー列となる．

次に，十分性を示す．$\{a_n\}$ がコーシー列であるとすれば，$\{a_n\}$ は有界であるため収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ が存在して，その極限値を α とおくとする．$\{a_n\}$ はコーシー列であるため

$$\forall\frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall m, n \in \mathbb{N}(m > N, n > N), |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

であり，同様にして $\frac{\varepsilon}{2}$ に対する $K \in \mathbb{N}$ が存在して

$$k > K \ \Rightarrow \ |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

をも満たす．ここで，$k_0 > K$ および $n_{k_0} > N$ を満たすように $k_0 \in \mathbb{N}$ を与えれば，$n > N$ で三角不等式により

$$|a_n - \alpha| = |(a_n - a_{n_{k_0}}) + (a_{n_{k_0}} - \alpha)| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - \alpha| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となることから $n \to \infty$ で $a_n \to \alpha$ である．

よって，命題は証明された．

□

2.4 級数

まずは，数列の部分和を数列と同様に項を無限大にしたものについての定義を与える．

定義 9.

数列 $\{a_n\}$ の部分和 S_n について，$n \to \infty$ としたものを**級数**もしくは**無限級数**といい，

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$$

とあらわされる．このとき，部分和の数列 $\{S_n\}$ がある値に収束するならば，級数は**収束**するといい，発散するならば級数は**発散**するという．特に，数列の項が全て $a_n \geq 0$ を満たすときその級数を**正項級数**といい，全ての a_n と a_{n+1} で符号が異なる級数を**交代級数**という．

まずは，級数が収束する必要条件と十分条件について示す．

級数が収束する必要条件

数列 $\{a_n\}$ による級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ が収束する必要条件は $n \to 0$ で $a_n \to 0$ となることである．

Proof.

$\{a_n\}$ の部分和を S_n とおくことにより

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

とあらわされ，$n \to \infty$ で $S_n \to S$ かつ $S_{n-1} \to S$ とすれば

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

となり，$n \to \infty$ で $a_n \to \infty$ となる．

よって，命題は証明された．

□

級数が収束する十分条件

数列 $\{a_n\}$ による級数について $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ が収束するならば $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も収束する．このような数列の絶対値をとった級数が収束することを**絶対収束**といい，絶対収束しない収束する級数を**条件収束**という．

Proof.

$\{a_n\}$ の部分和を S_n とあらわすことで，$n < m$ として三角不等式により

$$|S_m - S_n| = |(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|$$

となることから，仮定より $m, n \to \infty$ において級数の収束の必要条件から右辺は 0 に収束するため $|S_m - S_n|$ はコーシー列であり，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する．

よって，命題は証明された．

□

また，級数の順序について以下の定理が与えられる．

級数の順序

絶対収束する級数は級数の項の順序を並び替えることが可能である．

Proof.

数列 $\{a_n\}$ による正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ とその順序を並び替えることで得られる正項級数を $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ を与え，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

であるとする．S'_n に含まれる全ての項を含むように S_m を選択すれば，$n \leq m$ であり

$$S'_n \leq S_m$$

である．これは任意の n で成り立つため $n \to \infty$ で $S_n \to \infty$ とすることで

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}\ s.t.\ S'_n \leq S_m \leq S$$

が成り立つ．したがって，S'_n は上に有界な単調増加列であることから S'_n は収束し，$n \to \infty$ で $S'_n \to S'$ とすれば $S' \leq S$ である．これと同様のことを S_n にも適用することで

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}\ s.t.\ S_n \leq S'_m \leq S'$$

であり，$S \leq S'$ であるため，$S = S'$ である．

次に，$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束する級数である場合を示す．$\{a_n\}$ を正項による部分列 $\{a_n^+\}$ と負項による部分列 $\{a_n^-\}$ へと分解したとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \quad -\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

は収束する正項級数であり，

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

が成り立つ．$\{b_n\}$ に対しても同様の操作をすることで

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

となり，項を入れ替えても同じ値に収束する．

よって，命題は証明された．

□

補題 12.　数列 $\{a_n\}$ により条件収束する級数が生成されるならば，$\{a_n\}$ を正項による部分列 $\{a_n^+\}$ と負項による部分列 $\{a_n^-\}$ へと分解したとき，どちらも無限に項が存在し，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ および $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ は無限大に発散する．

Proof.

$\{a_n^+\}$ と $\{a_n^-\}$ のどちらかが有限個であると仮定したとき，有限個の項は収束性に影響を与えないため $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ は

絶対収束する．これは条件収束であることに反するため，$\{a_n^+\}$ と $\{a_n^-\}$ はどちらも無限に項が存在する．

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ と $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ が収束するとすれば

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

より条件収束であることに矛盾し，片方のみが収束するとすれば

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

より収束することに矛盾するため両方とも発散する．

よって，命題は証明された．

□

リーマンの級数定理

任意の条件収束する級数はその項を並び替えることで任意の値に収束もしくは発散させることが可能である．これを**リーマンの級数定理**という．

Proof.

数列 $\{a_n\}$ により条件収束する級数が生成されるとき，$\{a_n\}$ を正項による部分列 $\{a_n^+\}$ と負項に対して絶対値をとったものによる部分列 $\{a_n^-\}$ へと

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & (a_n > 0) \\ 0 & (other) \end{cases}, \quad a_n^- = \begin{cases} a_n & (a_n < 0) \\ 0 & (other) \end{cases}$$

のように分解したとする．このとき，項を並び替えることで c に収束させることを考える．

補題より，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ は無限大に発散するため，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ \leq c < \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+$$

である．同様にして，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ は無限大に発散するため，ある $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在し

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- < c \leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n_2-1} a_k^-$$

である．次に，$n_3 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_3-1} a_k^+ \leq c < \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_3} a_k^+$$

となり，さらに $n_4 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_3} a_k^+ + \sum_{k=n_2+1}^{n_4} a_k^- < c \leq \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{n_2} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_3} a_k^+ + \sum_{k=n_2+1}^{n_4-1} a_k^-$$

とあらわすことができる．この操作を繰り返す得られる級数を

$$S_{n_1} + S_{n_2} + S_{n_3} + S_{n_4} + \cdots$$

とすれば，この操作を偶数回繰り返したときには

$$\sum_{k=1}^{2m} S_{n_k} < c \leq \sum_{k=1}^{2m-1} S_{n_k} + S_{n_{2m}-1} \Rightarrow 0 < c - \sum_{k=1}^{2m} S_{n_k} \leq S_{n_{2m}-1} - S_{n_{2m}} = -a_{2m}$$

となり，奇数回繰り返したときには

$$\sum_{k=1}^{2m-2} S_{n_k} + S_{n_{2m-1}-1} \leq c < \sum_{k=1}^{2m-1} S_{n_k} \;\Rightarrow\; S_{n_{2m-1}-1} - S_{n_{2m-1}} = -a_{2m-1} \leq c - \sum_{k=1}^{2m-1} S_{n_k} < 0$$

となるため，m の偶奇によらず

$$\left| c - \sum_{k=1}^{m} S_{n_k} \right| \leq |a_m|$$

となり，$m \to \infty$ において級数の収束の必要条件から $a_m \to 0$ となるため

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} S_{n_k}$$

が得られる．

よって，命題は証明された．

□

また，級数の収束について以下の定理が成り立つ．

優収束定理

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ による絶対収束する級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n, \sum_{k=1}^{\infty} b_n$ について，十分に大きい n で $|a_n| \leq |b_n|$ が成り立つとする．このとき，$\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ も収束し，$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ が発散するならば $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ も発散する．これを**優収束定理**もしくは**比較判定法**という．

Proof.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_n, \sum_{k=1}^{\infty} b_n$ が正項級数のとき，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ とおけば，S_n と T_n は単調増加列であるため

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n \;\Rightarrow\; S_n \leq T_n$$

である．$n \to \infty$ で $T_n \to T$ と収束するならば $S_n \leq T_n \leq T$ となり，S_n は上に有界な単調増加列となるため S_n も収束する．$n \to \infty$ で $S_n \to \infty$ となるならば $S_n \leq T_n$ より $T_n \to \infty$ となる．

次に，$\sum_{k=1}^{\infty} a_n, \sum_{k=1}^{\infty} b_n$ が絶対収束する級数の場合を示す．$\{a_n\}$ を正項による部分列 $\{a_n^+\}$ と負項による部分列 $\{a_n^-\}$ へと分解したとき

$$T^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \quad T^- = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$$

は収束する正項級数であり，三角不等式により

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| = |T^+ - T^-| \leq T^+ + T^-$$

が成り立つ．$\{b_n\}$ に対しても同様の操作をすることで

$$|S^+ - S^-| \leq S^+ + S^-$$

となり，仮定より $T^+ + T^- \leq S^+ + S^-$ であることから，正項級数についての命題に帰着するため絶対収束する級数の場合においても同様に成り立つ．

よって，命題は証明された．

□