フーリエ変換 -連続系のフーリエ変換-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

初回更新 2018 年 7 月 29 日
最終更新 2019 年 1 月 16 日

目次

第 1 章

フーリエ級数

1.1　フーリエ級数の導入

まずは三角関数列に関する以下の補題を示す．

補題 1.　長さ T の任意の $\mathbb{R}$ 上の区間 I において，それぞれの周期が T の $x \in \mathbb{R}$ による関数列

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi x}{T}, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi x}{T}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{4\pi x}{T}, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{4\pi x}{T}, \cdots \right\}$$

が与えられたとき，これは I で正規直交関数列である．

Proof.

$n \neq m$ となる $m, n \in \mathbb{N}$ を与えれば

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi mx}{T} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi nx}{T} = \frac{1}{T} \left(\cos \frac{2\pi x}{T}(m+n) + \cos \frac{2\pi x}{T}(m-n) \right) \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi mx}{T} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi nx}{T} = \frac{1}{T} \left(\cos \frac{2\pi x}{T}(m-n) - \cos \frac{2\pi x}{T}(m+n) \right) \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi mx}{T} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi nx}{T} = \frac{1}{T} \left(\sin \frac{2\pi x}{T}(m+n) - \sin \frac{2\pi x}{T}(m-n) \right) \end{cases}$$

となることから $m \neq n$ では全ての関数列の積の組み合わせにおいて，I での定積分は 0 となることがわかる．

$m = n$ としたとき

$$\sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi mx}{T} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi mx}{T} = \frac{1}{T} \sin \frac{4\pi mx}{T}$$

となることから，関数列のうち正弦と余弦の積において，I での定積分は 0 となることがわかる．正弦同士，余弦同士のときは

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi mx}{T} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi mx}{T} = \frac{1}{T} \left(1 + \cos \frac{4\pi mx}{T} \right) \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi mx}{T} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi mx}{T} = \frac{1}{T} \left(1 - \cos \frac{4\pi mx}{T} \right) \end{cases}$$

となり，このときの定積分は 0 でない値をもち，

$$\frac{1}{T} \int_I \left(1 + \cos \frac{4\pi mx}{T} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{T} \int_I \left(1 - \cos \frac{4\pi mx}{T} \right) \mathrm{d}x = 1$$

となる．これは関数列のノルムが 1 であることを示しており，この関数列は正規直交関数列であるということである．

よって，命題は証明された．

$\square$

この補題より，それぞれの周期が T である三角関数列はそれぞれが線型独立であり，それらを基底とした $x \in \mathbb{R}$ による周期関数 $f(x) = f(x+T)$ が実定数 c_0 と実数列 a_k, b_k により

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos \frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{T} \right)$$

とあらわされるものを考えることができる．

ここで，c_0 と a_k および b_k を算出することを考える．$f(x)$ が区分的に滑らかであるとすれば，c_0 は $f(x)$ の周期に対する平均値であるため，長さ T をもつ $\mathbb{R}$ 上の区間 I により

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_I f(x) \mathrm{d}x$$

である．$f(x)$ の両辺に対して $n \in \mathbb{N}$ による余弦をかければ

$$f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} = c_0 \cos \frac{2\pi nx}{T} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos \frac{2\pi nx}{T} \cos \frac{2\pi kx}{T} + b_k \cos \frac{2\pi nx}{T} \sin \frac{2\pi kx}{T} \right)$$

となり，三角関数が正規直交関数列であることから

$$\int_I f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} \mathrm{d}x = \int_I a_n \cos^2 \frac{2\pi nx}{T} \mathrm{d}x = \frac{T}{2} a_n \;\Leftrightarrow\; a_n = \frac{2}{T} \int_I f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} \mathrm{d}x$$

となり，同様にして，b_k は

$$b_n = \frac{2}{T} \int_I f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} \mathrm{d}x$$

とあらわすことができ，あたかも任意の周期関数が三角関数の和によってあらわすことができると考えることができる．

これより，以下の定義が与えられる．

定義 1.

周期 T の $x \in \mathbb{R}$ による区分的に滑らかな周期関数 $f(x) = f(x+T)$ は有限の N で実定数 c_0 と実数列 a_k, b_k により

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos \frac{2\pi kx}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{T} \right)$$

と三角関数によって分解することができる．これを $f(x)$ の**有限フーリエ級数**という．また，$N \to \infty$ としたときを**フーリエ級数**という．c_0, a_k, b_k のことをフーリエ級数に対する**フーリエ係数**といい，長さ T の任意の $\mathbb{R}$ 上の区間 I を与えることで

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_I f(x) \mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_I f(x) \cos \frac{2\pi nx}{T} \mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_I f(x) \sin \frac{2\pi nx}{T} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

という関係式が与えられる．また，$k = 1$ のときの三角関数の x の係数を**角周波数**といい，ω とあらわす．これにより，フーリエ級数は

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x \right)$$

とあらわされる．

$f(x)$ が偶関数であるとき，$f(x)$ は正弦の基底をもたないため，フーリエ級数は

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x$$

とあらわすことができ，これを**フーリエ余弦級数**という．同様にして，$f(x)$ が奇関数であるとき，$f(x)$ は余弦の基底をもたないため，フーリエ級数は

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega x$$

とあらわすことができ，これを**フーリエ正弦級数**という．

1.2　フーリエ級数の収束性

周期 T の $x \in \mathbb{R}$ による周期関数 $f(x) = f(x+T)$ が与えられたとき，どのような $f(x)$ が $f(x)$ のフーリエ級数かを考える．$f(x)$ の N による有限フーリエ級数を $f_N(x)$ とすれば

$$\lim_{N \to \infty} |f_N(x) - f(x)| = 0$$

を証明することでフーリエ級数が $f(x)$ に一様収束することが示される．
まずは，有限フーリエ級数の式を長さ T の $\mathbb{R}$ 上の区間 I を用いることで変形する．

$$\begin{aligned}
f_N(x) =& c_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x) \\
=& \frac{1}{T}(\int_I f(y) \mathrm{d}y + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{2}{T} \int_I f(y) \cos k\omega y \cos k\omega x \mathrm{d}y + \frac{2}{T} \int_I f(y) \sin k\omega y \sin k\omega x \mathrm{d}y \right) \\
=& \frac{2}{T} \int_I f(y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} (\cos k\omega y \cos k\omega x + \sin k\omega y \sin k\omega x) \right) \mathrm{d}y \\
=& \frac{2}{T} \int_I f(y) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \cos (k\omega(y-x)) \right) \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

ここで，以下の定理を導入する．

ディリクレ核の恒等式

$x \in \mathbb{R}$ により

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx$$

とあらわされた関数列のことを**ディリクレ核**という．この関数列を有限のフーリエ余弦級数とすることで，ディリクレ核の周期に対する平均値は $\frac{1}{2}$ であり，ディリクレ核に対して

$$D_n(x) = \frac{\sin \frac{1+2n}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x}$$

といった恒等式が成り立つ．

Proof.

ディリクレ核の両辺に対して，$2 \sin \frac{1}{2} x$ をかけて積和分解すれば

$$\begin{aligned}
2 \sin \frac{1}{2} x D_n(x) =& \sin \frac{1}{2} x + 2 \sin \frac{1}{2} x \sum_{k=1}^{n} \cos kx \sin \frac{1}{2} x \\
=& \sin \frac{1}{2} x + \sin \frac{3}{2} x - \sin \frac{1}{2} x \cdots + \sin \frac{1+2n}{2} x - \sin \frac{1-2n}{2} x \\
=& \sin \frac{1+2n}{2} x \\
D_n(x) =& \frac{\sin \frac{1+2n}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x}
\end{aligned}$$

となり，等式が得られる．

よって，命題は証明された．

□

ここで，角周波数を導入すれば $k\omega = \frac{2\pi k}{T}$ であることから，有限フーリエ級数はディリクレ核を用いて

$$\begin{aligned} f_N(x) =& \frac{2}{T}\int_I f(y) D_N\left(\frac{2\pi}{T}(y-x)\right)\mathrm{d}y \\ =& \frac{2}{T}\int_I f(y) D_N(\omega(y-x))\mathrm{d}y \end{aligned}$$

とあらわすことができる．これを元の収束判定の式に代入して，ディリクレ核の平均値に対する性質を用いて変形すれば

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{T}\int_I f(y)D_N(\omega(y-x))\mathrm{d}y - f(x)\right) =& 0 \\ \lim_{N\to\infty}\left(\frac{2}{T}\int_I f(y)D_N(\omega(y-x))\mathrm{d}y - \frac{2}{T}\int_I f(x)D_N(\omega(y-x))\mathrm{d}y\right) =& 0 \\ \frac{2}{T}\lim_{N\to\infty}\int_I \left(f(y)-f(x)\right) D_N(\omega(y-x))\mathrm{d}y =& 0 \end{aligned}$$

という関係式が得られる．

ここで，以下の定理を導入する．

リーマン・ルベーグの定理

$\mathbb{R}$ 上の任意の閉区間 I で積分可能な $x \in \mathbb{R}$ による区分的に滑らかな関数 $f(x)$ に対して，$z \in \mathbb{C}$ の極限によって

$$\lim_{|z|\to\infty}\int_I f(x)e^{-izx}\mathrm{d}x = 0$$

といった等式が成り立つ．

これを**リーマン・ルベーグの定理**という．

Proof.

積分の不等式より，部分積分を用いれば

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\int_I f(x)e^{-izx}\mathrm{d}x\right| =& \left|-\frac{1}{-iz}\left[f(x)e^{-izx}\right]_I - \frac{1}{-iz}\int_I f'(x)e^{-izx}\mathrm{d}x\right| \\ \leq& \frac{1}{|z|}\left[|f(x)|\right]_I + \frac{1}{|z|}\int_I |f'(x)|\mathrm{d}x \end{aligned}$$

となり，$f(x)$ は区分的に滑らかな関数であることから，$z \neq 0$ のとき積分値は有限になる．よって，$|z| \to \infty$ とすることで右辺は 0 に収束し，はさみうちの原理から積分値は 0 に収束する．

よって，命題は証明された．

□

また，この定理より，直ちに以下の系が導かれる．

系 1. 　$\mathbb{R}$ 上の任意の閉区間 I で積分可能な $x \in \mathbb{R}$ による区分的に滑らかな関数 $f(x)$ に対して，$z \in \mathbb{C}$ の極限によって

$$\lim_{|z|\to\infty}\int_I f(x)\cos zx\mathrm{d}x = \lim_{|z|\to\infty}\int_I f(x)\sin zx\mathrm{d}x = 0$$

が成り立つ．

Proof.

オイラーの定理より，実部と虚部を比較することで自明である．

□

フーリエ級数の収束性に関する式のディリクレ核を展開する．

$$\lim_{N\to\infty}\int_I (f(y)-f(x))\frac{\sin\left(\frac{1+2N}{2}\omega(y-x)\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\omega(y-x)\right)}\mathrm{d}y=0$$

ここで，$g(y)$ を

$$g(y)=(f(y)-f(x))\frac{1}{2\sin\left(\frac{1}{2}\omega(y-x)\right)}$$

と定義すれば，$g(y)$ が I で区分的に滑らかであるならば，リーマン・ルベーグの定理により積分値は 0 に収束し，フーリエ級数は収束することが示される．

$g(x)$ の分母は $y=x$ で 0 となるため，$y\to x$ の極限をとれば

$$\lim_{y\to x}g(y)=\frac{f(y)-f(x))}{y-x}\cdot\frac{(y-x)\frac{\omega}{2}\cdot\frac{2}{\omega}}{2\sin\left(\frac{1}{2}\omega(y-x)\right)}=\frac{f'(x)}{\omega}$$

となり，フーリエ級数は $f(x)$ が区分的に滑らかであるならば，連続領域で一様収束する．よって，$f(x)$ が区分的に滑らかで $f(x)$ のフーリエ級数が存在するならば，フーリエ級数は連続領域で $f(x)$ に一致する．

また，不連続点を含むフーリエ級数の収束値について以下の定理が成り立つ．

ディリクレの定理

周期 T の $x\in\mathbb{R}$ による周期関数 $f(x)=f(x+T)$ が区分的に滑らかであり，フーリエ級数が存在するならば，フーリエ級数は

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

に収束する．

これを**ディリクレの定理**もしくは**フーリエ級数の収束定理**という．

Proof.

フーリエ級数の収束性についての導入と同様に，長さ T の $\mathbb{R}$ 上の任意の区間 I および角周波数 $k\omega$ を用いて

$$\begin{aligned}&\int_I\left(f(y)-\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{1+2N}{2}\omega(y-x)\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\omega(y-x)\right)}\mathrm{d}y\\
=&\frac{1}{2}\int_I(f(y)-f(x-0))\frac{\sin\left(\frac{1+2N}{2}\omega(y-x)\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\omega(y-x)\right)}\mathrm{d}y\\
&+\frac{1}{2}\int_I(f(y)-f(x+0))\frac{\sin\left(\frac{1+2N}{2}\omega(y-x)\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\omega(y-x)\right)}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

とあらわされ，$g(x)$ と $h(x)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}g(y)&=(f(y)-f(x-0))\frac{1}{2\sin\left(\frac{1}{2}\omega(y-x)\right)}\\
h(y)&=(f(y)-f(x+0))\frac{1}{2\sin\left(\frac{1}{2}\omega(y-x)\right)}\end{aligned}$$

と定義すれば，$g(y),h(y)$ が I で区分的に滑らかであることを示すことでリーマン・ルベーグの定理を適用することができる．それぞれの分母は $y=x$ で 0 となるため，$y\to x-0$ と $t\to x+0$ の極限を考えれば

$$\begin{aligned}\lim_{y\to x-0}g(y)=&\frac{f(y)-f(x-0))}{y-(x-0)}\cdot\frac{(y-(x-0))\frac{\omega}{2}\cdot\frac{2}{\omega}}{2\sin\left(\frac{1}{2}\omega(y-x)\right)}=\frac{f'(x-0)}{\omega}\\
\lim_{y\to x+0}h(y)=&\frac{f(y)-f(x+0))}{y-(x+0)}\cdot\frac{(y-(x+0))\frac{\omega}{2}\cdot\frac{2}{\omega}}{2\sin\left(\frac{1}{2}\omega(y-x)\right)}=\frac{f'(x+0)}{\omega}\end{aligned}$$

となり，$N\to\infty$ とすることで，リーマン・ルベーグの定理の適用により，収束性に関する式は 0 に収束する．

よって，命題は証明された．

□

これより，以下の系が与えられる．

系 2.　周期 T の $x \in \mathbb{R}$ による周期関数 $f(x) = f(x+T)$ が区分的に滑らかであり，フーリエ級数が存在するならば，フーリエ係数 c_0, a_k, b_k により $f(x)$ は

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x\right)$$

とあらわされる．

Proof.
ディリクレの定理より自明である．

□

1.3　複素フーリエ級数

周期 T の $x \in \mathbb{R}$ による区分的に滑らかな周期関数 $f(x) = f(x+T)$ に対するフーリエ級数は，フーリエ係数 c_0, a_k, b_k および三角関数を複素数表示にすることで複素数の級数であらわすことができる．

$$\begin{aligned}
f(x) =& c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{2\pi kx}{T}} + e^{-i\frac{2\pi kx}{T}} \right) + b_k \frac{1}{2i} \left(e^{i\frac{2\pi kx}{T}} - e^{-i\frac{2\pi kx}{T}} \right) \right) \\
=& c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{i\frac{2\pi kx}{T}} \frac{a_k - ib_k}{2} + e^{-i\frac{2\pi kx}{T}} \frac{a_k + ib_k}{2} \right)
\end{aligned}$$

ここで，$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ および $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$ とおけば，フーリエ係数の定義より

$$\begin{aligned}
c_k =& \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi kx}{T} \mathrm{d}x - i \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi kx}{T} \mathrm{d}x \right) \\
=& \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\frac{2\pi kx}{T}} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

となり，同様にして c_{-k} は

$$c_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{i\frac{2\pi kx}{T}} \mathrm{d}x$$

となる．また，$k = 0$ としたとき，c_k および c_{-k} は c_0 と一致することからフーリエ級数は

$$\begin{aligned}
f(x) =& c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{i\frac{2\pi kx}{T}} + c_{-k} e^{-i\frac{2\pi kx}{T}} \right) \\
=& c_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{T}} \\
=& \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{T}}
\end{aligned}$$

と変形される．

よって，以下の定義を与えることができる．

定義 2.

周期 T の $x \in \mathbb{R}$ による区分的に滑らかな周期関数 $f(x) = f(x+T)$ は複素数列 c_k を用いて

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{T}}$$

のように複素指数関数の級数に分解することができる．これを $f(x)$ の**複素フーリエ級数**といい，連続領域では $f(x)$ と一致する．c_k のことを複素フーリエ級数に対する**複素フーリエ係数**といい

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\frac{2\pi kx}{T}} \mathrm{d}x$$

で与えられる．また，角周波数 ω を用いれば複素フーリエ級数は

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

とあらわされる．

第 2 章

フーリエ変換

2.1 フーリエ変換の導入

周期 T の $x \in \mathbb{R}$ による区分的に滑らかな周期関数 $f(x) = f(x+T)$ を与えたとする．一般の関数のフーリエ級数を考えたとき，一般の関数は端をもたない周期を無限大とした場合におけるものであると考えることができる．まずは，角周波数であることを用いて

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi(k+1)}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right) = \frac{\omega(k+1) - \omega k}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

という関係式を考えれば，複素フーリエ級数の定義より長さ T の $\mathbb{R}$ 上の区間 I を用いることで

$$\begin{aligned}
\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} &= \lim_{I\to\mathbb{R}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T}\int_I f(x)e^{-ik\omega x}\mathrm{d}x\right) e^{i\frac{2\pi kx}{T}} \\
&= \lim_{\substack{I\to\mathbb{R}\\ \Delta\omega\to 0}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_I f(x)e^{-ik\omega x}\mathrm{d}x\right) e^{ik\omega x} \\
&= \lim_{\substack{I\to\mathbb{R}\\ \Delta\omega\to 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_I f(x)e^{-ik\omega x}\mathrm{d}x\right) e^{ik\omega x}\Delta\omega
\end{aligned}$$

となる．このとき，総和部は ω に関するリーマン積分となることから，ω という変数を導入することで

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x\right)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

となる．

これより，以下の定義を与えることができる．

定義 3.

区分的に滑らかな関数 $f(x)$ について

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x$$

といった積分が存在するとき，これを**フーリエ変換**という．これは関数空間における写像としてあらわされ，$\mathcal{F}: f \to F$ もしくは $\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$ とあらわす．また，逆写像 $\mathcal{F}^{-1}: F \to f$ は

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

といった関係式が与えられ，これを**フーリエの積分定理**という．特に，x で連続であるとき，これを**逆フーリエ変換**といい

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\mathrm{d}\omega$$

とあらわされる．

また，フーリエ変換の可能条件として以下の定理が与えられる．

フーリエ変換の十分条件

区分的に滑らかな関数 $f(x)$ がフーリエ変換可能である十分条件は $f(x)$ が絶対可積分であることである．

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$$

Proof.

フーリエ変換の絶対値が有限であればフーリエ変換は存在するため，積分に関する不等式より

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-i\omega x}|\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$$

となり，絶対可積分であることがフーリエ変換の十分条件であることがわかる．

よって，命題が証明された．

□

また，フーリエ変換および逆変換はオイラーの公式により実部と虚部に分解ができる．

$$\begin{aligned} F(\omega) =& \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\mathrm{d}x - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x \\ f(x) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cos\omega x\mathrm{d}\omega + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\sin\omega x\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

$f(x)$ が偶関数であるとき，$f(x)\cos\omega x$ と $f(x)\sin x$ はそれぞれ偶関数と奇関数になることから

$$F(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\mathrm{d}x$$

とあらわされ，偶関数の和は偶関数であることから $F(\omega)$ も偶関数であり，逆変換は

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\cos\omega x\mathrm{d}\omega$$

となる．これらを**フーリエ余弦変換**および**逆フーリエ余弦変換**という．

同様にして，奇関数の場合も考えることができる．

$$\begin{aligned} F(\omega) =& -2i\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\mathrm{d}x \\ f(x) =& i\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega)\sin\omega x\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

この式で i を除いたものを**フーリエ正弦変換**および**逆フーリエ正弦変換**という．

2.2　フーリエ変換の性質

以下ではフーリエ変換に関する公式を証明していく．

フーリエ変換の線型性

$x \in \mathbb{R}$ による関数 $f_1(x), f_2(x)$ が与えられたとき，$\mathcal{F}[f_1(x)] = F_1(\omega), \mathcal{F}[f_2(x)] = F_2(\omega)$ とすれば定数 α, β を用いて

$$\mathcal{F}[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)$$

が成り立つ．

Proof.
フーリエ変換の定義より

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)] =& \int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)\right)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\ =&\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x+\beta\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\ =&\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)\end{aligned}$$

となり，線型性が示される．
よって，命題は証明された．

□

フーリエ変換と平行移動

$x\in\mathbb{R}$ による関数 $f(x)$ で $\mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)$ とすれば定数 a に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x-a)] =& e^{-i\omega a}F(\omega) \\ \mathcal{F}[e^{iax}f(x)] =& F(\omega-a)\end{aligned}$$

が成り立つ．

Proof.
第 1 式は $u=x-a$ と置換することで証明される．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x-a)] =& \int_{-\infty}^{\infty}f(x-a)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\ =&\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\omega(u+a)}\mathrm{d}u \\ =&e^{-i\omega a}F(\omega)\end{aligned}$$

第 2 式はフーリエ変換の定義より直ちに証明される．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{iax}f(x)] =& \int_{-\infty}^{\infty}e^{iax}f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\ =&\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i(\omega-a)x}\mathrm{d}x \\ =&F(\omega-a)\end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

フーリエ変換の相似性

$x\in\mathbb{R}$ による関数 $f(x)$ で $\mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)$ とすれば定数 $a\neq 0$ に対して

$$\mathcal{F}[f(ax)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

が成り立つ．

Proof.

$a > 0$ のときは $u = ax$ と置換することで証明される．

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(ax)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega\frac{u}{a}}\frac{1}{a}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)
\end{aligned}$$

$a < 0$ のときも $u = ax$ と置換することで証明される．

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(ax)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega\frac{u}{a}}\frac{1}{a}\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)
\end{aligned}$$

これらをまとめると

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

となる．

よって，命題は証明された．

□

フーリエ変換と導関数

$x \in \mathbb{R}$ による関数 $f(x)$ で $\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$ とすれば

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] &= (i\omega)^n F(\omega) \\
\mathcal{F}[(-ix)^n f(x)] &= F^{(n)}(\omega)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

Proof.

第 1 式は数学的帰納法により証明する．

$n = 0$ のとき成り立つことは自明のため，n のとき成り立つことを仮定して $n+1$ で成り立つことを示す．なお，このとき $k \le n$ で $x \to \pm\infty$ となるとき，$f^{(k)}(x)e^{-i\omega x} \to 0$ であるとする．

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f^{(n+1)}(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n+1)}(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\
&= \left[f^{(n)}(x)e^{-i\omega x}\right]_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\
&= (i\omega)(i\omega)^n F(\omega) \\
&= (i\omega)^{n+1}F(\omega)
\end{aligned}$$

第 2 式は微分と積分の順序が入れ替えることができるとすれば

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[(-ix)^n f(x)] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega^n}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega^n}F(\omega) \\
&= F^{(n)}(\omega)
\end{aligned}$$

となる．

よって，命題は証明された．

□

2.3　たたみこみ

定義 4.

$t \in \mathbb{R}$ による関数 $f(t), g(t)$ に対し

$$f(t) * g(t) = (f * g)(t) = \int f(\tau) g(t - \tau) \mathrm{d}\tau$$

といった 2 項演算によって与えられる積分を**たたみこみ**もしくは**合成績**という．

このとき，積分範囲は $f(t), g(t)$ の定義域に依存する．

以下では積分区間を $(-\infty, \infty)$ としたたたみこみに関する性質について証明をする．

たたみこみの交換則

$t \in \mathbb{R}$ による関数 $f(t), g(t)$ に対するたたみこみについて

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$$

が成り立つ．

Proof.

$u = t - \tau$ と置換することで直ちに証明される．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) \mathrm{d}\tau = - \int_{\infty}^{-\infty} f(t - u) g(u) \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - u) g(u) \mathrm{d}u$$

よって，命題は証明された．

□

たたみこみの分配則

$t \in \mathbb{R}$ による関数 $f(t), g(t), h(t)$ に対するたたみこみについて

$$f(t) * (g(t) + h(t)) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$$

が成り立つ．

Proof.

たたみこみの定義より直ちに証明される．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)(g(t - \tau) + h(t - \tau)) \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) \mathrm{d}\tau$$

よって，命題は証明された．

□

たたみこみの結合則

$t \in \mathbb{R}$ による関数 $f(t), g(t), h(t)$ に対するたたみこみについて

$$(f(t) * g(t)) * h(t) = f(t) * (g(t) * h(t))$$

が成り立つ．

Proof.

積分順序が変更可能な元で証明をする．

たたみこみの定義より $u=\tau-\iota$ と置換することで証明される．

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\iota)g(\tau-\iota)\mathrm{d}\iota\right)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(\iota)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau-\iota)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\iota \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(\iota)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(u)h(t-u-\iota)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\iota \\
&\int_{-\infty}^{\infty}f(\iota)(g*h)(t-\iota)\mathrm{d}\iota
\end{aligned}
$$

よって，命題は証明された．

□

たたみこみのフーリエ変換

$t\in\mathbb{R}$ による関数 $f(t),g(t)$ に対するたたみこみのフーリエ変換について

$$
\mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)G(\omega)
$$

が成り立つ．なお，$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega),\mathcal{F}[g(t)]=G(\omega)$ とする．

Proof.

積分順序が変更可能な元で証明をする．

たたみこみの定義より $u=t-\tau$ と置換することで証明される．

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)*g(t)\right)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(t-\tau)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{-i\omega(u+\tau)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(u)e^{-i\omega u}\mathrm{d}u\right) \\
&= F(\omega)G(\omega)
\end{aligned}
$$

よって，命題は証明された．

□

積のフーリエ変換

関数 $f(t),g(t)$ に対する積のフーリエ変換について

$$
\mathcal{F}[f(t)g(t)]=\frac{1}{2\pi}F(\omega)*G(\omega)
$$

が成り立つ．なお，$\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega),\mathcal{F}[g(t)]=G(\omega)$ とする．

Proof.

積分順序が変更可能な元で証明をする．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t)g(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)e^{i\tau x}\mathrm{d}\tau\right)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-\tau)x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)F(\omega-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)
\end{aligned}
$$

よって，命題は証明された．

□

2.4　多次元フーリエ変換

フーリエ変換とは 1 次元における関数空間間の写像であるが，これを多次元へと拡張することを考える．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ による関数 $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ を x_k でフーリエ変換すれば

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})e^{-ik\omega x_k}\mathrm{d}x_k
$$

となるが，これを拡張して $\boldsymbol{x}$ でフーリエ変換するとすれば，$f(\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換を $\boldsymbol{\omega} = (\omega, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ を用いて $F(\boldsymbol{\omega})$ とあらわすとすれば

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})e^{-i\omega x_1}e^{-i\omega_2 x_2}\cdots e^{-i\omega_n x_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})e^{-i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n
\end{aligned}
$$

となる．ここで，領域 $V = \mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{x}$ 近傍の微小領域を $\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})$ とあらわせば

$$
F(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})e^{-i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})}\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})
$$

となり，これが多次元におけるフーリエ変換である．