フーリエ変換 -離散系のフーリエ変換-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 8 月 4 日

目次

第 1 章

離散系のフーリエ変換

1.1 連続系の離散化

有限な連続系の関数 $f(t)$ をサンプリング周期 T で離散化したものを，サンプリング番号 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $f(x)$ を離散化した関数 $g(x)$ は以下のようにあらわすことができる．

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x = nT) \\ 0 & (other) \end{cases}$$

また，$T \to 0$ とすれば，$g(x) \to f(x)$ となる．このとき，$f(x)$ が積分可能な関数であるならば，$g(x)$ は有限の離散値であるため積分値が 0 となり，一致しなくなる．積分値を $f(x)$ に一致させるために周期 T でデルタ関数を $(-\infty, \infty)$ でたたみこみ，$T \to 0$ の極限をとる．なお，和と積分の順序は交換可能であるとする．

$$\begin{aligned} \lim_{T \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - nT)\mathrm{d}x &= \lim_{T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) \\ &= \lim_{T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

よって，以下の等式を得ることができる．

$$\lim_{T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x - nT) = f(x)$$

この等式の右辺において，デルタ関数によって $g(x)$ の 0 の領域は無視されている．よって，以下の定理が与えられる．

連続系と離散系の基本定理

連続系の関数 $f(x)$ をサンプリング周期 T でサンプリングした $n \in \mathbb{Z}$ に対する離散系の関数 $f[n] = f(nT)$ において，以下の関係式が成り立つ．

$$\lim_{T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(x - nT) = f(x)$$

Proof.

離散系の導入より，$g(x)$ は有限であることから $g(x)\delta(x - nT)$ の $x \neq nT$ の領域は 0 である．よって，$g(x) = f[n]$ と置くことができ，命題が証明された．

□

これより，有限の T の場合において離散系の関数を連続系の関数としてあらわすには，離散系の関数に対してデルタ関数をたたみこめばいいということである．$f[n]$ を連続系とした関数を $f_s(x)$ とする．

$$f_s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(x - nT)$$

これを用いることで離散系でも連続系として扱うことができる．また，この式の $f[n]$ を除いた関数は周期的なデルタ関数で，これを**くし型関数**もしくは**コム関数**といい $\delta_T(x)$ とあらわす．

1.2　離散時間フーリエ変換の導入

サンプリング周期 T の離散系の関数 $f[n]$ があり，これをフーリエ変換する．

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(x - nT) \right) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i\omega nT}
\end{aligned}$$

$F(\omega)$ は周期 $\frac{2\pi}{T}$ の周期関数のため，そのまま逆フーリエ変換をすると発散する．ここで，複素フーリエ係数を $c_k = \frac{a_k + ib_k}{2}$ と定義することで，$F(\omega)$ の複素フーリエ級数を示す．

$$\frac{F(\omega - 0) + F(\omega + 0)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(\omega) e^{ikT\omega} \mathrm{d}\omega \right) e^{-ikT\omega}$$

これを $f[n]$ のフーリエ変換と比較することで以下の関係式が得られる．

$$f[n] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-ikT\omega} \right) e^{inT\omega} \mathrm{d}\omega$$

この関係式が成り立つことを確認する．

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-ikT\omega} \right) e^{inT\omega} \mathrm{d}\omega =& \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \left(\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{i(n-k)T\omega} \mathrm{d}\omega \right) \\
=& \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] \frac{2\pi}{T} \delta_{n,k} \\
=& f[n]
\end{aligned}$$

よって，離散系によるフーリエ変換の式の等価性を示すことができたため，以下の定義を与えられる．

定義 1.

サンプリング周期 T の離散系の関数 $f[n]$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は以下のようになる．

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i\omega nT}$$

これを**離散時間フーリエ変換**といい，逆変換は以下のようになる．

$$f[n] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F(\omega) e^{inT\omega} \mathrm{d}\omega$$

離散時間フーリエ変換は連続系におけるフーリエ変換の離散化である．

1.3　離散フーリエ変換の導入

周期 L の連続系の周期関数 $f(x)=f(x+L)$ をサンプリング周期 T で周期あたり $N=\frac{L}{T}\in\mathbb{N}$ だけサンプリングした離散系の周期関数を $f[n]=f[n+N]=f(nT)$ とする．この条件下で複素フーリエ級数 c_k を求める．

$$\begin{aligned}c_k=&\frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(\sum_{n=0}^{N-1}f[n]\delta(x-nT)\right)e^{-i\frac{2\pi k}{L}x}\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{N-1}f[n]\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left(\delta(x-nT)e^{-i\frac{2\pi k}{L}x}\mathrm{d}x\right)\\=&\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{N-1}f[n]e^{-i\frac{2\pi k}{L}nT}\\=&\frac{1}{L}\sum_{n=0}^{N-1}f[n]e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}\end{aligned}$$

フーリエ変換の導入と同様にして，この式の係数 $\frac{1}{L}$ を除いた式が $f[n]$ のフーリエ変換 $F[k]$ である．

$$F[k]=Lc_k=\sum_{n=0}^{N-1}f[n]e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}$$

また，$f[n]$ のフーリエ変換は周期 N の周期関数であるため，これの離散時間フーリエ変換の逆変換を考えればいい．なお，$F[k]$ は離散系の関数のため連続系に変換し，そのときの周期も N であるため離散関数としてみた $F[k]$ のサンプリング周期は $N=\frac{L}{T}$ より 1 である．

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\left(\sum_{k=0}^{N-1}F[k]\delta(x-n)\right)e^{i\frac{2\pi n}{N}x}\mathrm{d}x=&\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F[k]\left(\int_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}}\delta(x-n)e^{i\frac{2\pi n}{N}x}\mathrm{d}x\right)\\=&\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F[k]e^{i\frac{2\pi nk}{N}}\end{aligned}$$

これより，以下の関係式が得られる．

$$f[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1}f[m]e^{-i\frac{2\pi mk}{N}}\right)e^{i\frac{2\pi nk}{N}}$$

この関係式が成り立つことを確認する．

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1}f[m]e^{-i\frac{2\pi mk}{N}}\right)e^{i\frac{2\pi nk}{N}}=&\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f[m]\left(\sum_{k=0}^{N-1}e^{i\frac{2\pi(n-m)k}{N}}\right)\\=&\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}f[m]\cdot N\delta_{n,m}\\=&f[n]\end{aligned}$$

よって，離散系による周期関数のフーリエ変換の式の等価性を示すことができたため，以下の定義を与えられる．

定義 2.

サンプリング周期 T でサンプリング数 N の離散系の関数 $f[n]$ のフーリエ変換 $F[k]$ は以下のようになる．

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-i\frac{2\pi nk}{N}}$$

これを**離散フーリエ変換**といい，逆変換は以下のようになる．

$$f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]e^{i\frac{2\pi nk}{N}}$$

これより，離散フーリエ変換は元の連続系の関数の周期とサンプリング周期に依存しない変換であることがわかる．また，離散フーリエ変換は連続系におけるフーリエ級数の離散化である．

1.4　離散コサイン変換の導入

離散フーリエ変換から複素数を除去することを考える．離散系の関数 $f[n]$ で n 個のサンプリングをしたとする．これを $f[0]$ を対称に以下を満たす偶対称な列へと拡張する．

$$f[n] = f[-n-1]$$

これより，離散フーリエ変換は以下のようにあらわされる．

$$F[k] = \sum_{n=-N}^{N-1} f[n]e^{-i\frac{2\pi nk}{2N}} = \sum_{n=-N}^{N-1} f[n]e^{-i\frac{\pi nk}{N}}$$

これを変形する．

$$\begin{aligned}
F[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-i\frac{\pi nk}{N}} + \sum_{n=-N}^{-1} f[n]e^{-i\frac{\pi nk}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-i\frac{\pi nk}{N}} + \sum_{n=1}^{N} f[-n]e^{i\frac{\pi nk}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-i\frac{\pi nk}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} f[-n-1]e^{i\frac{\pi(n+1)k}{N}} \\
&= e^{i\frac{\pi k}{2N}} \sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{-i\frac{\pi(2n+1)k}{2N}} + e^{i\frac{\pi k}{2N}} \sum_{n=0}^{N-1} f[n]e^{i\frac{\pi(2n+1)k}{2N}} \\
&= 2e^{i\frac{\pi k}{2N}} \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\cos\frac{\pi k(2n+1)}{2N}
\end{aligned}$$

同様にして逆変換をも示す．

$$\begin{aligned}
f[n] &= \frac{1}{2N}\sum_{k=-N}^{N+1} F[k]e^{\frac{2\pi nk}{2N}} \\
&= \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]e^{i\frac{\pi nk}{N}} + \frac{1}{2N}\sum_{k=-N}^{-1} F[k]e^{i\frac{\pi nk}{N}}
\end{aligned}$$

また，ここで $k=-N$ のときの $F[k]$ を確認する．

$$f[-N] = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\cos\left(-\frac{\pi(2n+1)}{2}\right) = 0$$

よって，以下のように変形される．

$$
\begin{aligned}
f[n] =& \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]e^{i\frac{\pi nk}{N}} + \frac{1}{2N}\sum_{k=-N+1}^{-1} F[k]e^{i\frac{\pi nk}{N}} \\
=& \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k]e^{i\frac{\pi nk}{N}} + \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N} F[-k]e^{-i\frac{\pi nk}{N}} \\
=& \frac{1}{2N}F[0] + \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N-1} F[k]e^{i\frac{\pi nk}{N}} + \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N-1} \overline{F[k]}e^{-i\frac{\pi nk}{N}}
\end{aligned}
$$

ここで，複素数成分を除去するために離散フーリエ変換を $F_c[k]$ と再定義する．

$$
F_c[k] = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi k}{2N}}F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\cos\frac{\pi k(2n+1)}{2N}
$$

これを逆変換についても代入する．

$$
\begin{aligned}
f[n] =& \frac{1}{2N}\cdot 2e^{i\frac{\pi\cdot 0}{2N}}F_c[0] + \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N-1} 2e^{i\frac{\pi k}{2N}}F_c[k]e^{i\frac{\pi nk}{N}} + \frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N-1} \overline{2e^{i\frac{\pi k}{2N}}F_c[k]}e^{-i\frac{\pi nk}{N}} \\
=& \frac{1}{N}F_c[0] + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} F_c[k]e^{i\frac{\pi k(2n+1)}{2N}} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} e^{-\frac{\pi k}{2N}}F_c[k]e^{-i\frac{\pi nk}{N}} \\
=& \frac{1}{N}F_c[0] + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} F_c[k]e^{i\frac{\pi k(2n+1)}{2N}} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} F_c[k]e^{-i\frac{\pi k(2n+1)}{2N}} \\
=& \frac{1}{N}F_c[0] + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1} F_c[k]\cos\frac{\pi k(2n+1)}{2N}
\end{aligned}
$$

これにより，離散フーリエ変換から複素数が除去され，以下の定義が与えられる．

定義 3.

サンプリング周期 T でサンプリング数 N の離散系の関数 $f[n]$ のフーリエ変換から複素数を除去したフーリエ変換 $F_c[k]$ は以下のようになる．

$$
F_c[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\cos\frac{\pi k(2n+1)}{2N}
$$

これを**離散コサイン変換**といい，逆変換は以下のようになる．

$$
f[n] = \frac{1}{N}F_c[0] + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1} F_c[k]\cos\frac{\pi k(2n+1)}{2N}
$$

また，離散コサイン変換の定義より，位相スペクトル $\theta_c(\omega_c)$ は以下のようになる．

$$
\theta_c(\omega_c) = \begin{cases} \dfrac{\pi k}{2N} & \left(\forall k \in \mathbb{N}\ s.t.\ \omega_c = \dfrac{\pi k}{N}\right) \\ 0 & (other) \end{cases}
$$

このように，離散コサイン変換での位相スペクトルはサンプリング数のみに依存するため，振幅スペクトルのみを考えることができる．

第 2 章

離散系と連続系の関係性

2.1　ポアソンの和公式

補題として，くし型関数についての等式を示す．

補題 1.　周期 T のくし型関数について，以下の等式が成り立つ．

$$\delta_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n x}{T}}$$

Proof.

くし型関数は周期関数であることから，複素フーリエ級数を用いて証明する．

$$\begin{aligned}
\delta_T(x) = &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(x) e^{-i\frac{2\pi n x}{T}} \mathrm{d}x \right) e^{i\frac{2\pi n x}{T}} \\
=& \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT) \right) e^{-i\frac{2\pi n x}{T}} \mathrm{d}x \right) e^{i\frac{2\pi n x}{T}} \\
=& \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(x) e^{-i\frac{2\pi n x}{T}} \mathrm{d}x \right) e^{i\frac{2\pi n x}{T}} \\
=& \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n x}{T}}
\end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

ポアソンの和公式

フーリエ変換可能な連続系の関数 $f(x)$ とそのフーリエ変換 $F(\omega)$ の関数列について以下の等式が成り立つ．なお，T は関数列の生成周期で x_0 は任意の定数である．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x_0 + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi n}{T} \right) e^{i\frac{2\pi n x_0}{T}}$$

これをポアソンの和公式という．

Proof.

フーリエ変換と補題 1 より，$f(nT)$ の無限和を計算する．

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+nT) = &\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega(x_0+nT)}\mathrm{d}\omega\right)\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\omega nT}\right)e^{i\omega x_0}\mathrm{d}\omega\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\frac{2\pi}{T}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-n\frac{2\pi}{T}\right)\right)e^{i\omega x_0}\mathrm{d}\omega\\
=&\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\delta\left(\omega-n\frac{2\pi}{T}\right)e^{i\omega x_0}\mathrm{d}\omega\right)\\
=&\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\frac{2\pi n}{T}\right)e^{i\frac{2\pi n x_0}{T}}
\end{aligned}
$$

よって，命題は証明された．

□

直ちに以下の系が導かれる．

系 1.　フーリエ変換可能な関数 $f(x)$ をサンプリング周期 T でサンプリングした離散系の関数 $f[n]=f(nT)$ があるとする．$f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ とすれば以下の等式が成り立つ．

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F\left(\frac{2\pi n}{T}\right)
$$

Proof.
ポアソンの和公式より，$x_0=0$ とすることで，命題は証明された．

□

2.2　サンプリング定理

連続系のフーリエ変換可能な関数 $f(x)$ があり，それをサンプリング周期 T でサンプリングした離散系の関数 $f[n]=f(nT)$ があり，それを連続系とした関数 $f_s(x)$ は以下のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
f_s(x) = &\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(x-nT)\\
= &\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(x-nT)\\
=&f(x)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nT)
\end{aligned}
$$

これはフーリエ変換をすると離散時間フーリエ変換となるが，$f(nT)$ をそのままにしたときの $f_s(x)$ をフーリエ変換することで，離散系と連続系のフーリエ変換の関係式を得る．$f[n]$ の離散時間フーリエ変換を $F_s(\omega)$，$f(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ とすれば，$f_s(x)$ のフーリエ変換は積のフーリエ変換を用いることで，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
F_s(\omega) =&\mathcal{F}\left[f(x)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nT)\right]\\
=&\frac{1}{2\pi}F(\omega)*\mathcal{F}[\delta_T(x)]
\end{aligned}
$$

ここで，ポアソンの和公式を適用してくし型関数をフーリエ変換する．

$$\mathcal{F}[\delta_T(x)] = \frac{1}{T}\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi nx}{T}}\right] = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right) = \frac{2\pi}{T}\delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$$

これを代入してたたみこみを展開する．

$$\begin{aligned}
F_s(\omega) =& \frac{1}{T}F(\omega) * \delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) \\
=& \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega - \tau)\mathrm{d}\tau \\
=& \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \tau - n\frac{2\pi}{T}\right)\right)\mathrm{d}\tau \\
=& \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\delta\left(\omega - \tau - n\frac{2\pi}{T}\right)\mathrm{d}\tau\right) \\
=& \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)
\end{aligned}$$

この関係式は，周期 $\frac{2\pi}{T}$ の周期関数 $F_s(\omega)$ は非周期関数 $F(\omega)$ を $\frac{2\pi}{T}$ だけ平行移動しながら重ね合わせることによって構成されることを示している．

これを離散フーリエ変換の逆変換の式に代入する．

$$\begin{aligned}
f[n] =& \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\left(\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)e^{inT\omega}\mathrm{d}\omega \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)e^{inT\omega}\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

ここで $f[n]$ から $f(x)$ を得ることを考えれば，$f[n]$ と $f(x)$ のスペクトルを一致させればいい．$F_s(\omega)$ は周期関数であることから $|\omega| \leq \frac{\pi}{T}$ のみを考える．このとき，以下の等式を満たす必要がある．

$$\forall k \in \mathbb{Z}\ s.t.\ k \neq 0 \Rightarrow F\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) = 0$$

$\omega_s = \frac{\pi}{T}$ とすれば，上記の条件式は以下と同値である．

$$\omega < -\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2} < \omega \Rightarrow F(\omega) = 0$$

よって，以下の定理が与えられる．

サンプリング定理

連続系のフーリエ変換可能な関数 $f(x)$ があり，それをサンプリング周期 T でサンプリングした離散系の関数 $f[n] = f(nT)$ があるとする．$\omega_s = \frac{\pi}{T}$ とし，$f(x)$ の最大角周波数を ω_{max} とするとき，$2\omega_{max} \leq \omega_s$ を満たすならば $f[n]$ から $f(x)$ を得ることができる．このことを**サンプリング定理**もしくは**標本化定理**という．

このとき，$f(x)$ は以下の式によって得ることができる．

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_s x}{2} - \pi n\right)$$

Proof.

$f(x)$ と $f[n]$ のフーリエ変換をそれぞれ $F(\omega), F_s(\omega)$ とする．

$F(\omega)$ は $|\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$ のみで定義されることで $f(x)$ と $f[n]$ のスペクトルが一致するため，$2\omega_{max} \leq \omega_s$ が条件となる．

次に，$f(x)$ を得る式を導出する．$|\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$ 以外では $F(\omega)$ は 0 のため以下のような窓関数を定義する．

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \left(|\omega| \leq \dfrac{\omega_s}{2}\right) \\ 0 & (other) \end{cases}$$

$H(\omega)$ の逆変換を $h(x)$ とすれば以下のように変形される．

$$\begin{aligned} F(\omega) =& TH(\omega)F_s(\omega) \\ f(x) =& Th(x) * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(x - nT) \right) \end{aligned}$$

$h(x)$ を算出する．

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{i\omega x} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{i\frac{\omega_s x}{2}} - e^{-i\frac{\omega_s x}{2}}}{ix} = \frac{\sin \frac{\omega_s x}{2}}{\pi x}$$

これを代入してたたみこみを計算する．

$$\begin{aligned} f(x) =& T \frac{\sin \frac{\omega_s x}{2}}{\pi x} * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(x - nT) \right) \\ =& \frac{\sin \frac{\omega_s x}{2}}{\frac{\omega_s}{2} x} * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(x - nT) \right) \\ =& \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{\omega_s \tau}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\delta(x - nT - \tau) \right) \mathrm{d}\tau \\ =& \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \left(\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \frac{\omega_s \tau}{2} \delta(x - nT - \tau) \mathrm{d}\tau \right) \\ =& \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \operatorname{sinc} \frac{\omega_s (x - nT)}{2} \\ =& \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \operatorname{sinc} \left(\frac{\omega_s x}{2} - \pi n \right) \end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□