# 常微分方程式 -一般論-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 10 月 27 日

# 目次

# 第 1 章

# 概要

## 1.1 常微分方程式

**定義 1.**

独立変数を $t$，未知関数を $x(t)$ とする．このとき $n \in \mathbb{N}$ で導関数の次数をあらわし，

$$F(t, x, x', x'', \cdots, x^{(n)}) = 0$$

のように定義される代数方程式を**常微分方程式**といい，$n$ をこの方程式の**階数**という．この方程式に $x$ およびその導関数を代入したときに恒等的に 0 になるものを，この微分方程式の**解**という．

一般に，常微分方程式には外から付随条件を与えることで，それを満たす解を考える．独立変数 $t$ による $x(t)$ の常微分方程式で，$t$ のある値 $t_0$ に対して定数 $x_{i,0}$ によって

$$x^{(m)}(t_0) = x_{m,0}$$

といった条件が与えられたとする．このような条件を**初期条件**といい，解における初期条件を満たすような解を求める問題を**初期値問題**という．

また，$\boldsymbol{x}$ が領域 $\Omega$ が与えられ，その境界 $\partial\Omega$ で

$$x|_{\partial\Omega} = \psi$$

といった既知関数 $\psi$ が与えられたとする．このような条件を**境界条件**といい，解における境界条件を満たすような解を求める問題を**境界値問題**という．

$F$ が未知関数 $x$ およびその偏導関数によって線型結合であらわされるとき，$F$ は**線型**であるという．また，$F$ の最大階数の偏導関数によって線型結合であらわされるとき，**準線型**であるという．これ以外のときを**非線型**であるという．

一般に常微分方程式の解には任意定数が与えられており，それを含む解を**一般解**といい，初期条件や境界条件によって任意定数に値を代入した状態の解を**特殊解**という．また，非線型な微分方程式には一般解から得ることのできない解が存在することがあり，そのような解を**特異解**という．

# 第 2 章

# 線型常微分方程式

## 2.1 関数の線型独立

**定義 2.**

ある関数 $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$ が与えられたとき，定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ によって

$$\sum_{i=0}^{n} C_i u_i(t)$$

という関係式が与えられたとする．これが恒等的に 0 である条件が

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$$

のみであるとき，$u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$ は線型独立であるという．

また，線型独立性の十分条件として以下の定理が与えられる．

関数の線型独立性

ある解析関数 $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$ が与えられたとき，定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ により $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$ が線型独立ならば

$$\sum_{i=0}^{n} C_i u_i^{(k)}(t) = 0$$

が恒等的に成り立つのは $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ のときのみである．また，これらの関係を行列により

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n)}(t) & u_2^{(n)}(t) & \cdots & u_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とまとめることができる．このとき変換行列の行列式を $W(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))$ とあらわすならば，線型独立性をもつには $W(u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)) \neq 0$ を満たせば十分である．このような行列式を**ロンスキー行列式**もしくは**ロンスキアン**という．

*Proof.*

関数の線型独立条件の両辺を微分することで十分性は自明である．

□

## 2.2　線型常微分方程式

**定義 3.**

$n$ 階の線型常微分方程式は独立変数 $t$，未知関数を $x(t)$ とあらわせば，既知関数 $p_1(t), p_2, \cdots, p_n(t)$ と既知関数 $r(t)$ によって

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t) x^{(k)}(t) = r(t)$$

とあらわされる．また，$L$ を用いて $L(x) = r(t)$ とあらわすこともでき，このとき $L$ を**微分線型作用素**という．

この常微分方程式において，$r(t) = 0$ のときを**同次式**もしくは**斉次式**であるといい，$r(t) \neq 0$ のときを**非同次式**もしくは**非斉次式**であるという．

まずは線型常微分方程式の一般論について考える．

$x(t)$ による線型常微分方程式 $L(x) = r(t)$ を満たす 1 つの解 $x_0$ が存在するとき，$L$ の線型性より

$$L(x - x_0) = L(x) - L(x_0) = r(t) - r(t) = 0$$

が成り立つ．つまり，$u = x - x_0$ とおくことによって，$L(u) = 0$ の解と $x_0$ によって微分方程式の解は和 $x = x_0 + u$ とあらわされる．そのため，線型常微分方程式は $L(x) = 0$ の解を求めることと，1 つの解 $x_0$ を求めることに分解される．

次に，定数係数の線型常微分方程式の斉次式に対する解法について考える．微分方程式が定数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ によって

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)}(t) = 0$$

とあらわされるとして，$p(t) = x'(t)$ とすれば，元の方程式に対して 1 階微分することで

$$\sum_{k=0}^{n} a_k p^{(k)}(t) = 0$$

となる．これを元の方程式と比較すれば，上式は元の方程式と相似であることがわかる．つまり，この微分方程式の解について全ての導関数が線型従属，つまりは

$$x(t) \propto x'(t) \propto \cdots \propto x^{(n)}(t)$$

であるとすれば $\alpha x(t) = p(t)$ を満たす比例定数 $\alpha$ が存在する．これを満たす関数は $e^{\alpha t}$ であることから，解は $e^{\alpha t}$ の $\alpha$ が方程式を満足するように選択することで定まり，このような解を**基本解**という．また，$\alpha$ を未知数としたままで微分方程式に代入することで

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k e^{\alpha t} = 0$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$$

が得られ，これは $\alpha$ についての方程式となり，これを解くことで基本解を得ることができる．このような方程式を**特性方程式**という．また，代数学の基本定理より特性方程式は複素数の範囲を含めることで $\alpha$ は重複をも含めて $n$ 個の解が存在する．特性方程式の $k$ 番目の解 $\alpha$ を $\alpha_k$ とあらわし，それらが全て違う値をとるならば，ロンスキアンより

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha_1 t} & e^{\alpha_2 t} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 t} & \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \end{vmatrix} = \alpha_2 e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} - \alpha_1 e^{(\alpha_1+\alpha_2)t} = (\alpha_2 - \alpha_1) e^{(\alpha_1+\alpha_2)t}$$

となり，$\alpha_1 \neq \alpha_2$ で $W(e^{\alpha_1 t}, e^{\alpha_2 t}) \neq 0$ となるため，基本解は全て線型独立である．このとき，$\alpha_k$ に対応する任意定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を用いて基本解との線型結合であらわされた式を元の方程式に代入すれば，

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} C_k e^{\alpha_k t}\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k L(e^{\alpha_k t})$$

となり，$L(e^{\alpha_k t}) = 0$ であることは明らかなため，線型独立な基本解が任意定数を用いて線型結合によってあらわされた式も解となることがわかる．

ここで，以下の補題を与える．

**補題 1.**　独立変数 $t$ による未知関数 $x(t)$ についての $n$ 階定数係数線型常微分方程式で

$$x(t) \propto x'(t) \propto \cdots \propto x^{(n)}(t)$$

であるとき特性方程式は重解をもたない．これは逆も成り立つ．

*Proof.*

逆については特性方程式の導出より自明である．この命題の対偶をとれば，重解をもつならば $i \neq j$ かつ $0 \leq i, j \leq n$ で $x^{(i)}(t) \not\propto x^{(j)}(t)$ となる $i, j$ が存在することである．定数 $a_k$ を用いた $\gamma$ による特性方程式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \gamma^k = 0$$

が $\alpha$ で $p$ 重解をもつとき

$$(\gamma - \alpha)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \gamma^k (-\alpha)^{p-k} = 0 \ \Rightarrow \ \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{(k)}(t)(-\alpha)^{p-k} = 0$$

とあらわされるため，1 つでも $x^{(i)}(t) \not\propto x^{(j)}(t)$ となる組み合わせを与えればいい．$x(t) = te^{\alpha t}$ とすれば，

$$\begin{aligned}
x^{(k)}(t) =& \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (t)^{(k)} (e^{\alpha t})^{(k-i)} \\
=& \binom{k}{0} t\alpha^k e^{\alpha t} + \binom{k}{1} \alpha^{k-1} e^{\alpha} \\
=& e^{\alpha t} \alpha^k (t + k\alpha^{-1})
\end{aligned}$$

となり，これを元の微分方程式に代入して二項係数の公式を用いることで

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} e^{\alpha t} \alpha^k (t + k\alpha^{-1})(-\alpha)^{p-k} =& (-\alpha)^p e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (t + k\alpha^{-1})(-1)^{-k} \\
=& (-\alpha)^p e^{\alpha t} \left( t \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k + \alpha^{-1} \sum_{k=0}^{p} k \binom{p}{k} (-1)^k \right) \\
=& (-\alpha)^p e^{\alpha t} \cdot (0 + 0) \\
=& 0
\end{aligned}$$

となり，このとき $x(t) \not\propto x'(t)$ である．

よって，命題は証明された．

□

この補題により，特性方程式が重解をもつことと，$i \neq j$ かつ $0 \leq i, j \leq n$ で $x^{(i)}(t) \not\propto x^{(j)}(t)$ となる $i, j$ が存在することが同値となるため，特性方程式の導出の仮定を満たさなくても特性方程式により重解をもつ場合として考えることができる．

特性方程式が重解をもつことに関わらず，特性方程式により導出した基本解の線型結合で解はあらわすことができるため，特性方程式が $\alpha$ で $p$ 重解をもつときは

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{(k)}(t)(-\alpha)^{p-k}=0$$

という微分方程式を考えるだけで十分である．$e^{\alpha t}$ も微分方程式の解となるが，これと線型独立な $p-1$ 個の解を得る必要がある．ここで，$e^{\alpha t}$ に対して線型になるように適当な解析関数 $A(t), B(t)$ および $\rho(t)$ によって

$$x(t)=A(t)e^{\alpha t}+B(t)=(A(t)+B(t)e^{-\alpha t})e^{\alpha t}=\rho(t)e^{\alpha t}$$

により解が構成されると考えることができる．このとき，$x(t)$ の $k$ 階導関数は

$$x^{(k)}(t)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\rho^{(i)}(t)\alpha^{k-i}e^{\alpha t}$$

となり，これを微分方程式に代入すれば

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^{(k)}(t)(-\alpha)^{p-k}=&0\\ \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-\alpha)^{p-k}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\rho^{(i)}(t)\alpha^{k-i}e^{\alpha t}\right)=&0\\ \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^{k}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\rho^{(i)}(t)\alpha^{-i}\right)=&0\end{aligned}$$

となる．微分方程式における任意の $\rho(t)$ の $n$ 階導関数 $\rho^{(n)}(t)$ の係数を $\beta_n$ として，$\beta_n$ について解けば，

$$\begin{aligned}\beta_n=&\sum_{k=n}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{n}\alpha^{-n}\\ =&\frac{\alpha^{-n}}{n!}\sum_{k=n}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\frac{k!}{(n-k)!}\end{aligned}$$

となり，二項係数の公式より $p<n$ で $\beta_n=0$ となり，$n=p$ で

$$\beta_p=\frac{\alpha^{-n}}{n!}$$

となる．これより，微分方程式は任意定数 $C'_1, C'_2, \cdots, C'_p$ を用いることで

$$\begin{aligned}\beta_p\rho^{(p)}(t)=&0\\ \rho^{(p)}(t)=&0\\ \rho(t)=&\sum_{k=1}^{p}C'_k t^k\end{aligned}$$

となり，$x(t)$ は

$$x(t)=e^{\alpha t}\sum_{k=1}^{p}C'_k t^k$$

となる．このとき，$e^{\alpha t}, te^{\alpha t}, \cdots, t^p e^{\alpha t}$ はそれぞれ線型独立であることから，この解は well-defined である．

次に，特性方程式の特定の場合における複素数解について考える．特性方程式の解の組み合わせで $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$ で $\gamma=\lambda\pm\mu i$ となるとき，$e^{\lambda+\mu i}$ と $e^{\lambda-\mu i}$ はそれぞれ線型独立であるが，任意定数 $C_1, C_2$ とオイラーの公式により，

$$\begin{aligned}C_1e^{\lambda+\mu i}+C_2e^{\lambda-\mu i}=&e^{\lambda}(C_1(\cos\mu+\sin\mu)+C_2(\cos\mu-\sin\mu))\\ =&e^{\lambda}((C_1+C_2)\cos\mu+i(C_1-C_2)\sin\mu)\end{aligned}$$

となり，新たに任意定数 $E_1 = C_1 + C_1, E_2 = i(C_1 - C_2)$ とすれば

$$e^{\lambda}(E_1 \cos\mu + E_2 \sin\mu)$$

とあらわすことができる．以上により，定数係数線型常微分方程式の斉次式における解の解析が可能となる．

このことを以下にまとめる．

**定数係数線型常微分方程式の斉次式における解法**

独立変数 $t$ と未知関数 $x(t)$ による $n$ 階線型微分方程式が，定数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ により

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)}(t) = 0$$

とあらわされるとする．このとき，未知変数 $\gamma$ による特性方程式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \gamma^k = 0$$

の解のうち，解が重複しないものによる集合 $\mathcal{A}$ とすれば $\mathcal{A}$ に対応する任意定数 $C$ により

$$x_1(t) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} C_\alpha e^{\alpha t}$$

あらわすことができ，$x_1(t)$ はこの微分方程式の解である．また，重解とその重複度のペアによる集合 $\mathcal{B}$ で $\beta \in \mathcal{B}$ の重解を $\beta$，重複度を $|\beta|$ とあらわすとすれば，$\beta$ に対応する任意定数 $C$ を用いて

$$x_2(t) \sum_{\beta\in\mathcal{B}} e^{\beta t} \left( \sum_{k=1}^{|\beta|} C_{\beta,k} t^k \right)$$

となり，$x_2(t)$ もこの微分方程式の解となる．

線形微分方程式の解は線形結合であらわすことができるため，

$$x(t) = x_1(t) + x_2(y)$$

となる．特に，特性方程式の解のうち，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ で $\gamma = \lambda \pm \mu i$ となるものが存在するとき，微分方程式の解 $x_3(t)$ は任意定数 $C_1, C_2, C_3, C_4$ を用いることで

$$x_3(t) = C_1 e^{(\lambda+\mu i)t} + C_2 e^{(\lambda-\mu i)t} = e^{\lambda}(C_3 \cos\mu + C_4 \sin\mu)$$

とあらわすことができる．

次に，一般の線型微分方程式について考える．一般に解法は存在しないが，関数を置換したりすることで定数係数の微分方程式に帰着させることができる場合がある．以下で例を与える．

独立変数 $t$，未知関数を $x(t)$ と定数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ による微分方程式

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k} = r(t)$$

を考える．このとき，$t = e^u$ と置換することで，合成関数の連鎖律と逆写像定理により，微分演算子 $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = e^{-u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} &= e^{-u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(e^{-u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right) = e^{-2u}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

となり，微分演算子は $u$ に関する微分演算子と指数関数の積であらわされる．これを形式的に $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} = e^{-ku}D_k$ とあらわせば

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}t^{k+1}} = e^{-(k+1)u}\left(\frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}u} - kD_k\right) \ \Rightarrow\ D_{k+1} = \frac{\mathrm{d}D_k}{\mathrm{d}u} - kD_k$$

となる．この変換式を代入することで

$$\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ku} e^{-ku} D_k = \sum_{k=0}^{n} a_k D_k = r(t)$$

となり，定数係数線型常微分方程式に帰着する．このような微分方程式を**オイラーの微分方程式**という．

## 2.3　定数変化法

独立変数 $t$ と未知関数を $x(t)$ による $n$ 階の線型常微分方程式が既知関数 $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t), r(t)$ によって

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t) x^{(k)}(t) = r(t)$$

と与えられたとき，微分線形作用素により $L(x) = r(t)$ とあらわせば，これを満たす 1 つの解 $x_0$ が存在するとき $L(u) = 0$ の解によって $x(t) = x_0(t) + u(t)$ となる．$u$ は基本解 $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$ と任意定数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ を用いて線型結合であらわされとすれば，$x(t)$ は

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0(t) + u(t) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_{0,k}(t) + \sum_{k=1}^{n} C_k u_k(t) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x_{0,k}(t) + C_k u_k(t)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_{0,k}(t)}{u_k(t)} + C_k\right) u_k(t)
\end{aligned}$$

とあらわされる．なお，$x_{0,k}(t)$ は $x_0(t)$ を $n$ 個に分割したうちの 1 つである．このとき，

$$C_k(t) \equiv \left(\frac{x_{0,k}(t)}{u_k(t)} + C_k\right)$$

と定義すれば，$L(u) = 0$ の一般解に対する任意定数 $C_k$ を $C_k(t) = C_k$ とおいて元の $L(x) = r(t)$ に代入して $C_k(t)$ を求めることで解を得ることができる．このように任意定数を関数として扱うことで線型常微分方程式の解を求める方法を**定数変化法**という．

直接 $C_k(t)$ を求める方法を考える．まず，全ての $C_k(t)$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} C'_k(t) u_k^{(p)}(t) = 0$$

といった条件を与える．なお，$0 \le p \le n-2$ である．次にこれを用いて $x$ の導関数を求める．

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{k=1}^{n} C_k(t) u_k(t) \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \sum_{k=1}^{n} C_k(t) u'_k(t) \\
&\ \vdots \\
\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} &= \sum_{k=1}^{n} C_k(t) u_k^{(n-1)}(t) \\
\frac{\mathrm{d}^{n}x}{\mathrm{d}t^{n}} &= \sum_{k=1}^{n} \left(C'_k(t) u_k^{(n-1)}(t) + C_k(t) u_k^{(n)}(t)\right)
\end{aligned}$$

これを $L(x) = r(t)$ に代入すれば，$L(u_k) = 0$ より

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} p_k(t)\left(\sum_{i=1}^{n} C_i(t)u_i^{(k)}(t)\right) + p_n(t)\sum_{k=1}^{n} C_k'(t)u_k^{(n-1)}(t) =& r(t)\\ \sum_{k=0}^{n} C_k'(t)u_k^{(n-1)}(t) =& \frac{r(t)}{p_n(t)}\end{aligned}$$

となる．ここで $b(t) = \frac{r(t)}{p_n(t)}$ とすれば，

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_{n-1}(t) & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_{n-1}'(t) & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \cdots & u_{n-1}^{(n-1)}(t) & u_n^{(n-1)}(t) \\ u_1^{(n)}(t) & u_2^{(n)}(t) & \cdots & u_{n-1}^{(n)}(t) & u_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(t) \\ C_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

といった連立方程式が導かれる．このとき，変換行列部はロンスキアンの元の行列である．この連立方程式を解いて，それぞれの $C_k'(t)$ を積分して $C_k(t)$ を求めることができる．

## 2.4　級数解法

独立変数 $t$ と未知関数 $x(t)$ による常微分方程式の解 $x(t)$ が定数 $a_1, a_2, \cdots$ を用いて $\alpha$ を中心とした冪級数展開可能であるとする．

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-\alpha)^k$$

また，この導関数は

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(x-\alpha)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-\alpha)^k \\ x''(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x-\alpha)^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}(x-\alpha)^k \\ &\vdots \\ x^{(n)}(t) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!}a_k(x-\alpha)^{k-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!}a_{k+n}(x-\alpha)^k \end{aligned}$$

となり，関数 $p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n, r(t)$ を用いた $n$ 階線型常微分方程式

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t)x^{(k)}(t) = r(t)$$

を与えれば，$p_k(t), r(t)$ も同様にして $\alpha$ を中心とした冪級数展開が可能であるとし，$c_1, c_2, \cdots$ を用いて

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-\alpha)^k = 0$$

とあらわされるとする．このとき，$(x-\alpha)^k$ はベクトル空間を構築することから，このときの等号成立条件は全ての $c_k$ で $c_k = 0$ である．つまり，適当な任意定数を用いながら全ての $c_k = 0$ の連立方程式を解き，各 $a_i$ を求めて $x(t)$ のべき級数展開に代入することで解を得ることができる．

これは原理的に $x(t)$ および $p_k(t), r(t)$ が $\alpha$ を中心とした冪級数展開が可能ならば線型常微分方程式を解くことが可能であることを示している．また，冪級数展開が可能である条件は，関数が $\alpha$ で正則であることから，$p_k(t), r(t)$ が不連続な関数であっても局所解を考えることができる．

# 第 3 章

# 準線型常微分方程式

## 3.1 準線型常微分方程式

**定義 4.**

$n$ 階の準線型常微分方程式は独立変数 $t$，未知関数を $x(t)$ として，関数 $f$ によって

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)})$$

とあらわされるものである．

準線型微分方程式は一般に解くことは不可能である．しかし，以下の定理を与えることによって解ける場合がある．

準線型常微分方程式の 1 階連立分解

任意の準線型常微分方程式は 1 階の連立準線型常微分方程式に変換可能である．

*Proof.*

独立変数 $t$，未知関数を $x(t)$ として，関数 $f$ によって

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$$

といった準線型常微分方程式を与える．このとき

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = x'(t) \\ \vdots \\ x_n(t) = x^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

とおけば，両辺を 1 階微分することで

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \end{cases}$$

となり，1 階連立分解される．

よって，命題は証明された．

□

この 1 階連立分解により解くことができる例を示す．準線型常微分方程式

$$x''(t) = \sqrt{1 + (x'(t))^2}$$

を与えて，これを 1 階連立分解をすると

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = \sqrt{1+x_2^2(t)} \end{cases}$$

となり，$x_2(t)$ についての常微分方程式が形成されたためこれを解く．なお，式変形に合わせた適当な任意定数 $C_1$ を用いる．

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x_1}{\sqrt{1+x_2^2}} &= \int \mathrm{d}t \\ \log|x_2 + \sqrt{1+x_2^2}| &= t + C_1 \\ x_2 + \sqrt{1+x_2^2} &= C_1 e^t \\ 1 + x_2^2 &= (C_1 e^t - x_2)^2 \\ x_2 &= \frac{C_1 e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2C_1} \end{aligned}$$

次に $x_2$ を積分して $x_1$ を求める．

$$x_1 = \frac{C_1}{2}\int e^t \mathrm{d}t - \frac{1}{2C_1}\int e^{-t}\mathrm{d}t \quad = \frac{C_1 e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2C_1} + C_2$$

これで $x_1 = x$ より解が求まる．また，$C_1 = 1, C_2 = 0$ としたとき，$x = \cosh t$ となる．

## 3.2　差分法

以下のようにして与えられる独立変数 $t$ による未知関数 $x = x_1(t)$ に対する準線型常微分方程式を考える．

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = f(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) \end{cases}$$

また，このとき初期条件として $t = t_0$ のとき $x_n(t_0) = x_{n,0}$ であるならば，$x_n(t)$ に対するテイラー展開により，

$$\begin{aligned} x_n(t_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_n^{(k)}(t_0)}{k!}(t_0 - t_0)^k = x_{n,0} \\ x_n(t_0 + h) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_n^{(k)}(t_0)}{k!}(t_0 + h - t_0)^k = x_{n,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_n^{(k)}(t_0)}{k!} h^k \end{aligned}$$

となる．このとき，$h$ が十分に小さければこの級数は収束し，このときの収束値を $x_{n,1}$ として $t_1 = t_0 + h$ とすれば，同じようなことを繰り返し考えることができる．このような考えを元にして解の近似値を得る方法を**差分法**という．また，$h$ のことを**差分**といい，$h$ が正のときを**前進差分**，負のときを**後進差分**という．

関数を $f$，偏微分は変数の添え字により略記すれば $x_n(t)$ は偏微分の連鎖律により，

$$\begin{aligned} x_n'(t) =& f \\ x_n''(t) =& \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = f_t + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_t + \sum_{i=1}^{n-1} f_{x_i} x_{i+1} + f_{x_n} f = g \\ x_n'''(t) =& \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = g_t + \sum_{i=1}^{n} g_{x_i} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = g_t + \sum_{i=1}^{n-1} g_{x_i} x_{i+1} + g_{x_n} f \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)}(t) =& \frac{\partial}{\partial t}(x_n^{(k)}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_n^{(k)}) x_{i+1} + \frac{\partial}{\partial x_n}(x_n^{(k)}) f = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_i} + f \frac{\partial}{\partial x_n} \right) x_n^{(k)} \end{aligned}$$

となり，各変数に対する 1 階偏微分によって，導関数の漸化式が定義できる．これは計算量は非常に大きいが，無限回数微分可能な解をもつことを仮定すれば，準線型常微分方程式の解の存在することを示している．また，1 階連立分解の結果の右辺を $\boldsymbol{p} = (1, x_2, x_3, \cdots, f)$ とすれば，

$$x_n^{(k+1)}(t) = \boldsymbol{p} \cdot \nabla x_n^{(k)}(t)$$

のようにあらわすことができる．実際の計算機では適当な近似値で $N$ 次近似で

$$x_n(t_0 + h) = x_{n,0} + \sum_{k=1}^{N} \frac{x_n^{(k)}(t_0)}{k!} h^k + O(h^N)$$

と考える．

ここで，簡易化のために

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

といった常微分方程式を考える．このとき，初期条件を $t = t_0$ で $y(t_0) = y_0$ としたとき，$N = 2$ の近似をすれば

$$\begin{aligned} y(t_0 + h) &= y_0 + y'(t_0)h + \frac{h^2}{2} y''(t) + O(h^2) \\ &= y_0 + f(t_0, y_0)h + \frac{h^2}{2}(f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0)f(t_0, y_0)) + O(h^2) \end{aligned}$$

となる．ここで，$O(h^2)$ は無視して，定数 $a, b$ を用いた連立方程式

$$\begin{cases} k_1 = f(t_0, y_0) \\ k_2 = f(t_0 + ah, y_0 + bk_1 h) \\ y(t_0 + h) = y_0 + h(k_1 + k_2) \end{cases}$$

を成り立たせることを考える．この定義より

$$\begin{aligned} k_2 = \frac{h}{2}(f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0)f(t_0, y_0)) &= f(t_0 + ah, y_0 + bk_1 h) \\ f_t(t_0, y_0) + f_y(t_0, y_0)f(t_0, y_0) &= \frac{f(t_0 + ah, y_0 + bf(t_0, y_0)h)}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

とあらわすことができ，$a = b = \frac{1}{2}$ とすれば，合成関数の連鎖律より右辺と左辺は一致する．よって，

$$\begin{cases} k_1 = f(t_0, y_0) \\ k_2 = f\left(t_0 + \dfrac{h}{2}, y_0 + k_1 \dfrac{h}{2}\right) \\ y(t_0 + h) = y_0 + h(k_1 + k_2) \end{cases}$$

となり，2 次近似による差分方程式へと帰着する．このような差分法を **2 次のルンゲ=クッタ法**といい，差分方程式により微分方程式の近似計算が可能となる．