偏微分方程式 -一階偏微分方程式-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 10 月 25 日

目次

第 1 章

概要

1.1 偏微分方程式

定義 1.

独立変数をベクトルで $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とあらわし，未知関数を $u(\boldsymbol{x})$ とする．このとき $a_i \in \mathbb{N}$ で偏導関数の次数をあらわし，以下の方程式を定義する．

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial^{a_1+\cdots+a_n}}{\partial x_1^{a_1}\cdots\partial x_n^{a_n}}\right) = 0$$

この方程式を**偏微分方程式**といい，$|a| = a_1 + \cdots + a_n$ の最大をこの方程式の**階数**という．また，$n = 1$ のときは常微分方程式である．

この方程式に u およびその偏導関数を代入したときに恒等的に 0 になるものを偏微分方程式の**解**といい，任意定数及び任意関数の含む状態の解を特に**一般解**という．

一般に，偏微分方程式には外に付随条件を与えて，それを満たす解を考える．

独立変数 x_i のある値 $x_{i,0}$ に対して既知関数 φ_i によって以下のような条件が与えられたとする．なお，x_i' は独立変数列から x_i を除いたことを意味するとする．

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}(x_1, x_2, \cdots, x_{i,0}, \cdots x_n) = \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_i', \cdots, x_n)$$

このような条件を**初期条件**といい，一般解における初期条件を満たすような解を求める問題を**初期値問題**という．

また，$\boldsymbol{x}$ が開領域 Ω が与えられ，その境界 $\partial\Omega$ で既知関数 ψ が与えられたとする．

$$u|_{\partial\Omega} = \psi$$

これは自由変数と束縛変数の数や関係によって様々な場合が考えられる．このような条件を**境界条件**といい，一般解における境界条件を満たすような解を求める問題を**境界値問題**という．

F が未知関数 u およびその偏導関数によって線型結合であらわされるとき，**線型**であるという．また，F の最大階数の偏導関数によって線型結合であらわされるとき，**準線型**であるという．これ以外のときを**非線型**であるという．

第 2 章

一階準線型偏微分方程式

2.1 ラグランジュの偏微分方程式

定義 2.

n 次の一階線型偏微分方程式はそれぞれの成分が独立変数なベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とおくことで未知関数を $u(\boldsymbol{x})$ とあらわせば，既知関数 $p_i(\boldsymbol{x}, u), r(\boldsymbol{x}, u)$ によって以下のようにあらわされる．

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = r(\boldsymbol{x}, u)$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} - r(\boldsymbol{x}, u) = 0$$

これは準線型偏微分方程式の一般的な形であるが，**ラグランジュの偏微分方程式**ということが多い．

一般的な解法について説明する．

$n+1$ 次元のベクトルによって $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n, r)$ とおき，$\varphi(\boldsymbol{x}, u) = u(\boldsymbol{x}) - u = 0$ に対してこの偏微分方程式は以下のようになる．

$$\nabla\varphi(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{p} = 0$$

このとき，$\nabla\varphi(\boldsymbol{x})$ は解となる超曲面 u の法線ベクトルであることから，$\boldsymbol{p}$ は u の法線に対して常に直交するということである．つまり，$\boldsymbol{p}$ は u 上の任意の点における接超平面上に存在するベクトルである．また，$\boldsymbol{p}$ を**特性ベクトル場**という．これは解が特性ベクトル場の積分曲線との併合であらわされなければならないことを意味しており，この曲線を**特性曲線**という．

このとき特性曲線は，ベクトル関数 $\boldsymbol{l}$ を以下のようにあらわすことができる．なお，$\boldsymbol{e}_i$ は基本ベクトルとなる基底であり t はパラメータである．

$$\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\boldsymbol{e}_i + u(t)\boldsymbol{e}_{n+1}$$

この接線が特性ベクトル場となることから任意定数 k によって以下の関係式が成り立つ．これを**特性方程式**という．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = k\boldsymbol{p}$$

これを各成分ごとで分解することで以下の関係式が導かれる．

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{p_1(\boldsymbol{x}, u)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{p_2(\boldsymbol{x}, u)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{p_n(\boldsymbol{x}, u)} = \frac{\mathrm{d}u}{r(\boldsymbol{x}, u)} = k\mathrm{d}t$$

この連立常微分方程式を解くことによってラグランジュの偏微分方程式を解くことができる．

第 3 章

全微分方程式

3.1　全微分方程式

定義 3.

それぞれの成分が独立変数な n 次のベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ によりあらわされる未知関数を $u(\boldsymbol{x})$ について，既知関数 $p_i(\boldsymbol{x}, u), r(\boldsymbol{x}, u)$ を用いて以下のようにあらわされるとする．

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{x}, u)\mathrm{d}x_i + r(\boldsymbol{x}, u)\mathrm{d}u = 0$$

このとき，$\varphi(\boldsymbol{x}, u)$ の全微分を以下のようにあらわしたとする．

$$\mathrm{d}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{d}u$$

これを用いて以下の対応を考えることができるとき，この方程式は**完全微分方程式**もしくは**全微分方程式**という．また，このとき方程式は**完全**であるという．

$$\mathrm{d}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{x}, u)\mathrm{d}x_i + r(\boldsymbol{x}, u)\mathrm{d}u = 0$$

よって，$\mathrm{d}\varphi = 0$ であることから φ で積分をすることによって，任意定数を C 用いて $\varphi = C$ というように解を求めることができる．

$n+1$ 次元のベクトルで $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n, r)$ と微小量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}u)$ を定義すれば，全微分方程式は以下のようになる．

$$\mathrm{d}\varphi = \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

これにより，$\nabla\varphi = \boldsymbol{p}$ という関係式が導かれる．つまり，φ が $\boldsymbol{p}$ のスカラーポテンシャルであることが全微分方程式であることの条件である．

つまり，$\boldsymbol{p}$ の任意の周回積分は 0 になるということであるから，積分路を $[t_1, t_2]$ で一致するベクトル関数 $\boldsymbol{l}$ で以下のようにあらわすことができる．なお，$\boldsymbol{e}_i$ は基本ベクトルとなる基底であり t はパラメータである．

$$C : \boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\boldsymbol{e}_i + u(t)\boldsymbol{e}_{n+1}$$

つまり，方程式が全微分方程式であることの必要十分条件は以下のようになる．

$$\oint_C \boldsymbol{p} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{t1}^{t2} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{l}) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = 0$$

また，内積を対応させる線積分は始点と終点にのみ依存することから解は任意定数 C を用いて以下のようにあらわ

すことができる．

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\int p_i(\boldsymbol{x},u)\mathrm{d}x_i+\int r(\boldsymbol{x},u)\mathrm{d}u=C$$

このとき，全ての積分項は等しくなるように任意関数項を調整する必要がある．また，偏微分方程式が完全でないとき，両辺に対して関数 $\lambda(\boldsymbol{x},u)$ をかけることによって完全になることがある．このとき，$\lambda(\boldsymbol{x},u)$ を積分因子といい，全微分方程式の必要十分条件は以下のようにあらわされる．

$$\oint_C \lambda\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{t1}^{t2}\lambda(\boldsymbol{l})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{l})\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=0$$

3.2　特殊な場合における全微分方程式

まず，それぞれの成分が独立変数な n 次のベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ によりあらわされる未知関数を $u(\boldsymbol{x})$ と既知関数 $p_i(\boldsymbol{x},u),r(\boldsymbol{x},u)$ を用いた方程式を示す．

$$\sum_{i=1}^{n}p_i(\boldsymbol{x},u)\mathrm{d}x_i+r(\boldsymbol{x},u)\mathrm{d}u=0$$
$$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n,r)$$

ここで，$n=2$ のときを考えると，方程式が全微分方程式である必要十分条件は以下のようになる．

$$\nabla\times\boldsymbol{p}=0$$

また，積分因子による方程式の完全化を考えたとき，以下の定理が導かれる．

3 次元ベクトル場の保存場化

3 次元のベクトル場 $\boldsymbol{p}$ に因子 λ をかけた $\lambda\boldsymbol{p}$ にスカラーポテンシャルが存在するためには以下の関係式が必要十分条件となる．

$$\boldsymbol{p}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{p})=0$$

Proof.

まずは必要条件を示す．

$\lambda\boldsymbol{p}$ に対する回転は以下のようになる．

$$\nabla\times(\lambda\boldsymbol{p})=\nabla\lambda\times\boldsymbol{p}+\lambda\nabla\times\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$$

ここで，両辺に対して $\boldsymbol{p}$ で内積をとることを考えたとき，$\boldsymbol{p}\cdot(\nabla\lambda\times\boldsymbol{p})$ は明らかに 0 であることから以下の式が成り立つ．

$$\boldsymbol{p}\cdot(\lambda\nabla\times\boldsymbol{p})=0\leftrightarrow\boldsymbol{p}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{p})=0$$

これにより必要条件について証明された．また，このとき十分条件も成り立つことは明らかである．

□

また，$n=1$ のときを考えたとき，以下の定理が成り立つ．

積分因子の存在

独立変数 x によりあらわされる未知関数 $u(x)$ と既知関数 $p(x,u),q(x,u)$ を用いて以下のような方程式があるとする．

$$p(x,u)\mathrm{d}x+q(x,u)\mathrm{d}u=0$$

このとき，この方程式を完全にする積分因子 $\lambda(x,u)$ が必ず存在する．

Proof.

2 次元のときの積分因子の存在条件より，$\boldsymbol{p} = (p, q, 0)$ とすることで $\boldsymbol{p} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{p})$ は恒等的に 0 になる．

よって命題が証明された．

□

3.3　一階準線型偏微分方程式との関係

それぞれの成分が独立変数なベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とおくことで未知関数を $u(\boldsymbol{x})$ とあらわせば，既知関数 $p_i(\boldsymbol{x}, u), r(\boldsymbol{x}, u)$ によって以下のようにあらわされる．

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(\boldsymbol{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} - r(\boldsymbol{x}, u) = 0$$

このとき，特性方程式を全て足すことで以下のようになる．

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{p_i(\boldsymbol{x}, u)} - n \frac{\mathrm{d}u}{r(\boldsymbol{x}, u)} &= 0 \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{r(\boldsymbol{x}, u)}{p_i(\boldsymbol{x}, u)} \mathrm{d}x_i - \mathrm{d}u &= 0 \end{aligned}$$

ここで，$\varphi(\boldsymbol{x}, u) = u(\boldsymbol{x}) - u$ とおくことで，上式が全微分方程式であるためには以下を満たす必要がある．

$$\mathrm{d}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i - \mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i - \mathrm{d}u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{r(\boldsymbol{x}, u)}{p_i(\boldsymbol{x}, u)} \mathrm{d}x_i - \mathrm{d}u = 0$$

これを元の式と比較することで以下の条件式が導かれる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \dfrac{r(\boldsymbol{x}, u)}{n p_i(\boldsymbol{x}, u)} \\ p_i(\boldsymbol{x}, u) = \mathrm{d}x_i \\ r(\boldsymbol{x}, u) = \mathrm{d}u \end{cases}$$

これにより，一階準線型偏微分方程式は完全微分方程式への変換が存在する．つまり，全微分方程式は一階準線型偏微分方程式よりも一般的な一階偏微分方程式を解くことができるということである．

第 4 章

一階非線型偏微分方程式

4.1　変数変換による線型化

独立変数をベクトルで $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とあらわし，未知関数を $u(\boldsymbol{x})$ に対して以下の方程式を与える．

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

変数変換による解法を考える．

$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ に変数変換することを考えたとき，それぞれによる微分演算子を $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}$ および $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}}$ とするならば，写像 f とヤコビ行列 J を用いて，微分演算子は共変ベクトルであるから横ベクトルであることに注意して，偏微分の連鎖律より以下のようになる．

$$f : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} \;\Leftrightarrow\; f^{-1} : \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}$$
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} J(\boldsymbol{y}) \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} J^{-1}(\boldsymbol{y})$$

このように上手く変数変換を選択することによって偏微分方程式を線型化もしくは準線型化することができることがあり，一階非線型偏微分方程式を解くことができることがある．

4.2　その他の解法

独立変数をベクトルで $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とあらわし，未知関数を $u(\boldsymbol{x})$ に対して以下の方程式を与える．

$$F\left(\boldsymbol{x}, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

また，u の x_i 成分での偏導関数を p_i とし，以下のようにあらわされるとする．

$$F(\boldsymbol{x}, u, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0$$

このとき，u の全微分は以下のようにあらわすことができる．

$$\mathrm{d}u = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}x_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}x_i - \mathrm{d}u = 0$$

上式は全微分方程式となることから解くことが可能である．つまり，p_i を $(\boldsymbol{x}, u)$ であらわすことができればいい．

例えば，F を x_k で偏微分すると以下のようになる．

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = 0$$

同様の関係式を $n-1$ 個あれば連立方程式で p_i に対する各偏導関数を求めることができる．これは $G_k(\boldsymbol{x}, u, p_1, p_2, \cdots, p_n) = C$ といった関数の存在を仮定することで p_i の偏導関数について解けることがある．また，全微分方程式のスカラーポテンシャルとなる条件と連立することで F とは別の連立偏微分方程式を構築することが出来ることがあり，例えば特性方程式から p_i についての関係式を得ることができれば偏微分方程式を解くことができる．