

グラフ理論 -基礎論-

いろはの学習備忘録

<https://168iroha.net>

初回更新 2019 年 7 月 3 日

最終更新 2019 年 7 月 3 日

目次

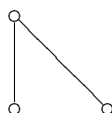
第 1 章	基礎論	1
1.1	グラフの定義	1
1.2	経路	4
1.3	木	6
1.4	平面的グラフ	7

第 1 章

基礎論

1.1 グラフの定義

あらゆる 2 項関係は、例えば半順序集合 $(V; \leq)$ のハッセ図は



のように丸で描かれた V の元と V の元同士に存在する非順序対からなる 2 項関係 $E \subseteq V \times V$ による組 (V, E) として表現することもでき、これと同様のことが他の 2 項関係でも考えることができる。

このことより、以下の定義を与えることができる。

定義 1.1

空ではない集合 V と V に対する非順序対からなる $E \subseteq V \times V$ を与えたとき、組 $G = (V, E)$ をグラフ (graph) といい、 V を頂点集合 (vertex set)、 E を辺集合 (edge set) という。また、 V の元を G の頂点 (vertex) もしくはノード (node) といい、 E の元を G の辺 (edge) もしくは弧 (arc) という。特に、 $|V|$ を G の位数 (order)、 $|E|$ を G のサイズ (size) という。

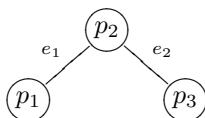
G とは別のグラフ $G' = (V', E')$ が存在して

$$V' \subseteq V, \quad E' \subseteq E$$

が成り立つとき、 G' を G の部分グラフ (subgraph) という。特に、 $G' \subseteq G$ かつ $G' \neq G$ のとき G' を G の真部分グラフ (proper subgraph) といい、 $G' \subset G$ とあらわし、 $G' \subseteq G$ かつ $V' = V$ ならば G' を G の全域部分グラフ (spanning subgraph) という。

V, E をそれぞれ G の頂点および辺であることを強調するために $V(G), E(G)$ とあらわすこともある。このとき、 G はグラフ G に対する頂点 $V(G)$ と $V(G)$ の非順序対からなる $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$ とあらわされる。

グラフ $G = (V, E)$ が $V = \{p_1, p_2, p_3\}$, $e_1 = \{p_1, p_2\}$, $e_2 = \{p_2, p_3\}$ で $E = \{e_1, e_2\}$ のように与えられたとき、



e_1 に対して、 p_1, p_2 を e_1 の端点 (endpoint) といい、 p_1, p_2 は e_1 に接続される、 e_1 が存在するならば p_1, p_2 は隣接するという。また、 e_1, e_2 が同じ端点 p_2 に接続されているとき、 e_1 と e_2 は隣接する (adjacent) という。部分グラフのうち、 $V' \subseteq V$ で V' を両端点とする辺の有無が G と一致するものを誘導部分グラフ (induced subgraph) という。

同じ端点をもつ辺が複数存在するとき、それらを多重辺といい、端点が同じである辺をループ (loop) という。



多重辺

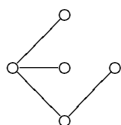


ループ

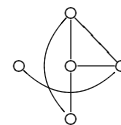
多重辺やループをもたないグラフを単純グラフ (simple graph) といい、そうではないグラフを多重グラフという。相異なる2点全てが隣接するグラフを完全グラフ (induced subgraph) といい、 n 点からなる完全グラフを K_n とあらわす。また、完全グラフとなる誘導部分グラフをクリーク (clique) といい、大きさ n のクリークを含むグラフは n -クリークであるという。辺をもつグラフならば、2頂点の完全グラフを必ず含むため2-クリークである。特に、グラフ $G = (V, E(G))$ で $n = |V|$ として、 V を頂点集合とする完全グラフ $K_n = (V, E(K_n))$ で

$$E' = E(K_n) \setminus E(G)$$

により構成されるグラフ $\bar{G} = (V, E')$ を G の補グラフ (complement graph) という。



G の例



G の例に対する \bar{G}

V が空ではない V_1, V_2 によって $V = V_1 + V_2$ と直和分割でき、 G の全ての辺が V_1 の頂点と V_2 の頂点を結ぶようにできるとき、 G を2部グラフ (bipartite graph) といい、 V_1, V_2 のような集合内の頂点を両端点とする辺が存在しない集合を独立集合 (independent set) という。つまり、2部グラフは頂点集合を2つの独立集合に分割可能なグラフのことである。一般に、頂点集合を n 個の独立集合に分割可能なグラフを n 部グラフ (n-partite graph) という。また、 $i \neq j$ を満たす任意の V_i, V_j で全ての頂点が互いに結ばれているとき、 G を完全 n 部グラフ (induced n-partite graph) といい、 V_1, V_2, \dots, V_n の頂点数を k_1, k_2, \dots, k_n ならば K_{k_1, k_2, \dots, k_n} とあらわす。



2部グラフの例



$K_{3,3}$

定義 1.2

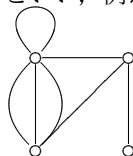
グラフ G, G' が与えられたとき、頂点集合 $V(G), V(G')$ 間の全単射 f で

$$\{p_1, p_2\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(p_1), f(p_2)\} \in E(G')$$

が成り立つ、すなわち G, G' の辺と頂点の接続状況が同一であるとき、 G, G' は同型 (isomorphic) であるといい、 $G \cong G'$ とあらわす。

定義 1.3

グラフ G の頂点 p に接続する辺の数を p の次数 (degree) といい、 $d(p)$ とあらわす。 $d(p) = 1$ のとき p を端点 (endpoint), $d(p) = 0$ である p を孤立点 (isolated point), $d(p)$ が偶数である p を偶頂点, $d(p)$ が奇数である p を奇頂点という。また、 G の最大次数を ΔG , 最小次数を δG とあらわす。 G の各頂点の次数を減少する順序で並べた数列を次数列 (degree sequence) といい、例えば



のようなグラフであれば $(5, 4, 3, 1)$ である。

特に、各頂点の次数が等しいグラフを正則グラフ (regular graph) といい、頂点の次数が k のグラフを k -正則 (k -regular) という。また、完全グラフは正則グラフである。

補題 1.1 グラフ $G = (V, E)$ の次数の総和は

$$\sum_{p \in V} d(p) = 2|E|$$

で与えられる. これを握手補題 (**handshaking lemma**) という.

Proof.

G の次数の総和はループを除き辺の両端で 2 回数えられ, ループは接続点で 2 回数えられるため等式が成り立つ. よって, 命題は証明された. □

補題 1.2 任意のグラフの奇頂点の数は偶数個である.

Proof.

グラフ $G = (V, E)$ の奇頂点の集合を V_o , 偶頂点の集合を V_e とすれば握手補題より

$$\sum_{p \in V_o} d(p) + \sum_{p \in V_e} d(p) = 2|E|$$

であり, 左辺第 2 項は $p \in V_e$ で $d(p)$ は偶数であるため偶数となる. つまり, 第 1 項も偶数である. このとき, $p \in V_o$ で $d(p)$ は奇数となるため $|V_o|$ は偶数でなければならない.

よって, 命題は証明された. □

グラフの頂点と辺の状態を行列で表現する方法として, 以下の定義が与えられる.

定義 1.4

グラフ $G = (V, E)$ で $m = |V|, n = |E|$ とあらわすとしたとき, 以下の定義が与えられる. なお,

$$V = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}, \quad E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

とする.

1). 隣接行列

a_{ij} を p_i と p_j を結ぶ辺の個数としたとき, $m \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$ を G の隣接行列 (**adjacency matrix**) という.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} p_1 & \cdots & p_j & \cdots & p_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

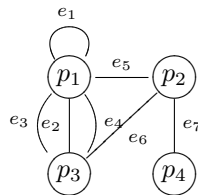
2). 接続行列

q_{ij} を p_i が e_j に接続する回数としたとき, $m \times n$ 行列 $Q = (q_{ij})$ を G の接続行列 (**incidence matrix**)

という.

$$Q = \begin{matrix} & e_1 & \cdots & e_j & \cdots & e_n \\ \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \cdots & \cdots & q_{ij} & \cdots & \cdots & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

隣接行列と接続行列について, 例えば次数の定義で与えたような



であれば, 隣接行列 A と接続行列 Q は以下のように与えられる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 経路

定義 1.5

グラフ $G = (V, E)$ で適当な $p_0, p_1, \dots, p_n \in V, e_1, e_2, \dots \in E$ により与えられる列

$$W = p_0 e_1 p_1 e_2 \cdots e_n p_n$$

を経路 (**route**) もしくは歩道 (**walk**) という. また, W に含まれる辺の数 n を歩道 W の長さ (**length**) とい
い, 始点と終点が一致, すなわち $p_0 = p_n$ であるとき歩道は閉じているという. 特に, 全ての辺が異なる歩道を路
(**trail**) もしくは小道 (**trail**) といひ, 始点と終点以外の全ての頂点が異なる路を道 (**path**), 閉じている路を回路
(**circuit**), 閉じている道を閉路 (**cycle**) という.

補題 1.3 全ての頂点の次数が 2 以上である有限グラフには閉路が存在する.

Proof.

グラフが多重グラフであるならば多重辺やループで閉路が存在する. 単純グラフであるならば, 仮定より適当な頂点
を選択して路を構築することができ, グラフは有限であるため, その過程において前に通った頂点を必ず通る.

よって, 命題は証明された.

□

定理 1.1

グラフ $G = (V, E)$ において, $V = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ としたとき $p_i - p_j$ 間の長さ n の経路の数は, G の隣接行
列 A の n 乗 A^n の ij 成分 $a_{ij}^{(n)}$ に等しい.

Proof.

n に関する数学的帰納法により示す. $n = 1$ のとき, 隣接行列の定義から $a_{ij}^{(1)}$ は $p_i - p_j$ 間の長さ 1 の経路の数に等

しい. n で成り立つと仮定して, $n+1$ のとき $A^{n+1} = A^n A$ であるため

$$a_{ij}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} a_{i1}^{(n)} & a_{i2}^{(n)} & \cdots & a_{im}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j}^{(1)} \\ a_{2j}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{mj}^{(1)} \end{pmatrix} \\ = a_{i1}^{(n)} a_{1j}^{(1)} + a_{i2}^{(n)} a_{2j}^{(1)} + \cdots + a_{im}^{(n)} a_{mj}^{(1)}$$

となるが, 仮定より $a_{ik}^{(n)} a_{kj}^{(1)}$ は $p_i - p_k$ 間の長さ n の経路の数と $p_k - p_j$ 間の長さ 1 の経路の数の積である. つまり, $a_{ik}^{(n)} a_{kj}^{(1)}$ は終点前に p_k を経由した場合における $p_i - p_j$ 間の長さ $n+1$ の経路の数であり, $a_{ij}^{(n+1)}$ は k についての総和となっているため, $a_{ij}^{(n+1)}$ は $p_i - p_j$ 間の長さ $n+1$ の経路の数である.

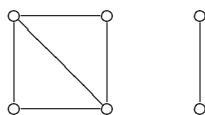
よって, 命題は証明された.

□

定義 1.6

グラフ $G = (V, E)$ の 2 頂点 $p, q \in V$ 間に道が存在するとき, p, q は連結 (**connected**) しているという. また, G の任意の頂点が連結であるとき, G を連結グラフ (**connected graph**) といい, そうでないときは非連結グラフ (**disconnected graph**), 極大連結部分グラフのことを連結成分 (**connected component**) という. なお, ここでの極大とはグラフの包含関係による半順序によるものである.

連結成分の定義より,



からわかるように, 任意の有限のグラフは連結成分の集まりとして扱うことができ, その個数を $k(G)$ とあらわす. 上の例であれば $k(G) = 2$ である. このとき, G から任意の頂点 $p \in V$ および辺 $e \in E$ を除去することを $G - p$ および $G - e$ とあらわすとき

$$k(G - p) > k(G)$$

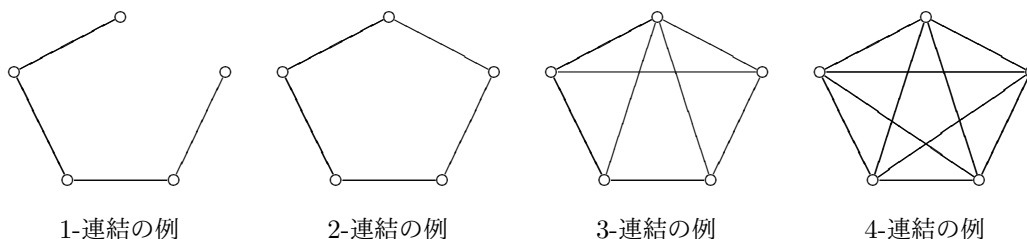
が成り立つならば p を G の切断点 (**cut vertex**) もしくは分離点といい,

$$k(G - e) > k(G)$$

が成り立つならば e を G の切断辺 (**cut edge**) もしくは橋 (**bridge**) という. なお, $G - e$ は G から e を除去したときの誘導部分グラフである. これらを一般化すると以下ようになる.

- 1). k 頂点の集合 $V_k \subseteq V$ が $S \subseteq V \setminus V_k$ を G から除去したときの誘導部分グラフが非連結となるならば, S を V_k -点切断集合もしくは V_k -分離集合といい, $|S|$ の最小を V_k -点切断集合の点連結度という. このとき, 点連結度を $\kappa(G; V_k)$ とあらわす.
- 2). k 頂点の集合 $V_k \subseteq V$ が $S \subseteq E$ を G から除去したとき非連結となるならば, S を V_k -辺切断集合もしくは V_k -非連結化集合といい, $|S|$ の最小を V_k -辺切断集合の辺連結度という. このとき, 辺連結度を $\lambda(G; V_k)$ とあらわす.

また, G の任意の頂点の連結度が k 以上であるとき, G は k -連結 (**k-connected**) であるという.



1.3 木

定義 1.7

グラフのうち、閉路をもたないものを林もしくは森 (**forest**) といい、連結な森を木 (**tree**) という。また、あるグラフの全域部分グラフのうち木であるものをそのグラフの全域木 (**spanning tree**) という。

定理 1.2

グラフ $T = (V, E)$ について、以下の命題はすべて同値である。

- 1). T は木である。
- 2). T は連結であり、全ての辺は橋である。
- 3). T の任意の2点はただ1本の道で結ばれる。
- 4). T は閉路を含まないが、 T の非隣接な2点を新たな辺で結ぶとちょうど1つの閉路ができる。
- 5). T に閉路はなく、サイズが $|V| - 1$ である。
- 6). T は連結で、サイズが $|V| - 1$ である。

Proof.

1) \Rightarrow 2) を示す。任意の $e = \{u, v\}$ に対して $T - e$ が連結であるとすれば、 $T - e$ に u と v を結ぶ道が存在することとなり、それを e と結ぶことで閉路が形成され T が木であることに矛盾する。つまり、 T の任意の辺は橋である。連結であることは仮定より明らかである。

2) \Rightarrow 3) を示す。 T は連結であるため T の任意の2点は少なくとも1つの道で結ばれているが、ある2点 $p_1, p_2 \in V$ を結ぶ道が2つ以上存在すれば、それを合わせたものの中に閉路が存在し、全ての辺が橋であることに矛盾する。

3) \Rightarrow 4) を示す。 T に閉路が存在するならば、閉路上の2点は少なくとも2本の道で結ばれているため、3) に矛盾する。 T の非隣接な2点 $u, v \in V$ で辺 e を結ぶとすれば、仮定より u, v 本にはちょうど1本の道が存在するため、それを e と結ぶことでちょうど1つの閉路が生成される。

4) \Rightarrow 1) を示す。仮定より T が連結であることを示せばよい。 T が非連結であると仮定すれば、 T の2つの連結成分 T_1, T_2 で T_1 の頂点 $u \in V(T_1)$ と T_2 の頂点 $v \in V(T_2)$ を結んで辺を生成しても閉路は生じない。これは非隣接な2点を結んだ時に閉路が生成されることに矛盾するため、 T は連結である。

1) \Rightarrow 5) と 5) \Rightarrow 6) と 6) \Rightarrow 1) は $p = |E|$ についての数学的帰納法により示す。なお、 $p = 1$ のときは自明であるため、 $p \geq 2$ 未満で成り立つと仮定して p で成り立つことを示せばいい。

1) \Rightarrow 5) を示す。2) より T の任意の辺の除去すると2つのグラフ T_1, T_2 に分離され、 T_1, T_2 は木であるため仮定より

$$\begin{aligned} |E(T_1)| &= |V(T_1)| - 1 \\ |E(T_2)| &= |V(T_2)| - 1 \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} |E(T)| &= |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 \\ &= |V(T_1)| + |V(T_2)| - 1 \\ &= |V(T)| - 1. \end{aligned}$$

5) \Rightarrow 6) を示す。 T が非連結であるとすれば、仮定より T の連結成分 T_1, T_2, \dots, T_k は木であるため、仮定より

$$|E(T_1)| = |V(T_1)| - 1, \quad |E(T_2)| = |V(T_2)| - 1, \quad \dots, \quad |E(T_k)| = |V(T_k)| - 1$$

となり、

$$|E(T)| = \sum_{n=1}^k |E(T_n)| = |V(T)| - k < |V(T)| - 1$$

となるため T のサイズが $p - 1$ であることに矛盾するため T は連結である。

6) \Rightarrow 1) を示す。仮定より T が閉路を含まないことを示せばいい。頂点数 p' のグラフが連結となる最小の辺の数は

明らかに $p-1$ である. T が閉路 C を含むとして, C 上の任意の辺 $e \in E(T)$ で $T-e$ を考えれば, 仮定より $T-e$ は連結であり, サイズは $p-2$ である. これは, 連結なグラフの辺の数の最小性に矛盾するため T は閉路を含まない. よって, 命題は証明された. □

これより, 以下の系が得られる.

系 1.2-1 位数 2 以上の木は次数 1 の頂点を少なくとも 2 点もつ.

Proof.

木 $T = (V, E)$ が次数 1 の点を高々 1 点しかもたないとすれば, $|V|-1$ 個の頂点は少なくとも次数は 2 でありするため

$$\sum_{p \in V} d(p) \geq 2(|V| - 1) + 1$$

となるが, 握手補題より

$$\sum_{p \in V} d(p) = 2|E| = 2(|V| - 1)$$

となることに矛盾するため, T は次数 1 の頂点を少なくとも 2 点もつ.

よって, 命題は証明された. □

系 1.2-2 連結グラフは全域木を含む.

Proof.

連結グラフ G に対して, T を極小な連結全域部分グラフとすれば, T の任意の辺は橋であるため木である.

よって, 命題は証明された. □

定義 1.8

特別な頂点が定められた木を根付き木 (**rooted tree**) といい, その頂点を根 (**root**) という. 根付き木 $R = (V, E)$ の根 $r \in V$ から任意の頂点 $p \in V$ への道はただ 1 つ存在し, 向きを与えることができる. このとき, r から p への道の長さは p の深さ (**depth**) もしくは水準 (**level**) という. また, 次数 1 の頂点は葉 (**leaf**) といい, それ以外の頂点を内点 (**inner point**) という. 辺 $\{u, v\} \in E$ で u から v への向きが与えられたとき, u を v の親 (**parent**) といい, v を u の子 (**child**) という. v とは別の u を親にもつ $w \in V$ が与えられたとき, w は v の兄弟 (**brother**) という.

特に, 各頂点の子の数が n 以下の根付き木を n 分木 (**n-ary tree**) といい, 全ての内点の子の数が n である根付き木を正則 n 分木 (**complete n-ary tree**) という.

1.4 平面的グラフ

定義 1.9

グラフ $G = (V, E)$ を与えたとき, E の任意の辺が交差していないとき, G を平面グラフ (**plane graph**) であるといい, 平面グラフと同型なグラフを平面的グラフ (**planar graph**) もしくは単に平面的 (**planar**) であるという. G は頂点と辺により平面をいくつかの領域に分割しており, それらの領域を G の面 (**surface**) もしくは領域 (**domain**) という. また, G の外側の領域, すなわち有界でない領域を無限面 (**infinite surface**) もしくは無限領域 (**infinite domain**) という.

定理 1.3 オイラーの多面体定理

連結平面グラフ $G = (V, E)$ の位数を $p = |V|$, サイズを $q = |E|$, 領域数を r としたとき

$$p - q + r = 2$$

が成り立つ。これをオイラーの多面体定理 (Euler's theorem) という。

Proof.

q に関する数学的帰納法により証明をする。 $q = 0$ のとき $p = 1$ かつ $r = 1$ となるため $p - q + r = 2$ が成り立つ。 q 以下の全ての連結平面グラフで成り立つと仮定して $q + 1$ で成り立つことを示す。 G が木であるとき

$$p = (q + 1) + 1, \quad r = 1$$

であるため、 $(q + 1) + 1 - (q + 1) + 1 = 2$ となるため成り立つ。 G が木でないときは G に閉路 C が存在し、 C 上の辺 $e \in E$ による $G - e$ について考える。このとき、 $G - e$ は連結平面グラフで位数は p でサイズは $(q + 1) - 1 = q$ である。また、 $G - e$ の領域数は e により分断されている領域を結合したものとなるため $r - 1$ である。仮定より $G - e$ では命題は成り立つため

$$p - q + (r - 1) = 2 \Leftrightarrow p - (q + 1) + r = 2.$$

よって、命題は証明された。

□

この定理より、以下の系が与えられる。

系 1.3-1 連結平面的グラフ $G = (V, E)$ の位数を $p = |V| \geq 3$, サイズを $q = |E|$ とするとき、

$$q \leq 3p - 6$$

が成り立つ。また、 G が n 角形未満を含まなければ

$$q \leq \left\lceil \frac{np - 2n}{n - 2} \right\rceil$$

が成り立つ。

Proof.

G に r 個の領域 F_1, F_2, \dots, F_r があると、領域 F_k の境界を一周する閉じた歩道の長さを f_k とする。各辺は2つの領域の境界であるか、1つの領域に含まれるかのいずれかであるため、 $\sum_{k=1}^r f_k$ において G の各辺は2回ずつ数えられる。また、仮定より $p \geq 3$ であるため $f_k \geq 3$ であり、

$$3r \leq \sum_{k=1}^r f_k = 2q.$$

この関係式をオイラーの多面体定理に適用すれば

$$3p - 3q + 2q \geq 6 \Leftrightarrow q \leq 3p - 6.$$

G が n 角形未満を含まないときは $f_k \geq n$ であるため

$$nr \leq \sum_{k=1}^r f_k = 2q$$

より

$$np - nq + 2q \geq 2n \Leftrightarrow q \leq \frac{np - 2n}{n - 2} \leq \left\lceil \frac{np - 2n}{n - 2} \right\rceil.$$

よって、命題は証明された。

□

系 1.3-2 完全グラフ K_5 および完全2部グラフ $K_{3,3}$ は非平面的グラフである.

Proof.

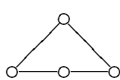
K_5 の位数は5でサイズは10であるため、補題1の関係式を満たさない. 同様に、 $K_{3,3}$ の位数は6でサイズは9であるため、 $n=4$ のときの補題1の関係式を満たさない.

よって、命題は証明された.

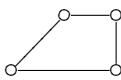
□

定義 1.10

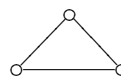
グラフ $G = (V, E)$ に対して、 $\{u, v\} \in E$ を G から取り除き、新しい頂点 w と2辺 $\{u, w\}, \{w, v\}$ を挿入する操作を0回以上繰り返すことにより得られるグラフを G の細分 (subdivision) という. また、グラフ G, H が同じグラフの細分であるとき、 G と H は同相 (homeomorphic) であるという.



G の例

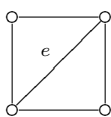


G と同相な H の例

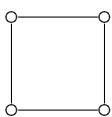


細分したら G, H となるグラフ

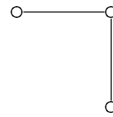
G から $e = \{u, v\} \in E$ を取り除いたグラフを $G - e$ とあらわし、 $G - e$ から u, v を同一視して重ね合わせて得られるグラフを G/e とあらわすとする. なお、 G/e にする操作はその操作により多重辺やループが生じるときは G/e から除去するものとする. このとき、 G から $G - e$ および G/e を生成する操作をそれぞれ除去および縮約といい、これらの操作と孤立点の除去といった操作をまとめてマイナー操作という.



G の例

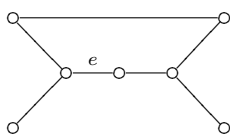


e の除去 $G - e$

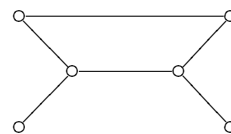


e の縮約 G/e

また、マイナー操作のうち、縮約を次数2の頂点を端点にもつ辺に対して行うとしたものを位相的マイナー操作という.



G の例



次数2の頂点を端点にもつ e の縮約 G/e

G に対してマイナー操作を0回以上繰り返すことにより得られるグラフを G のマイナーといい、同様に、位相的マイナー操作を0回以上繰り返すことにより得られるグラフを G の位相的マイナーという. 特に、 G のある性質が G の任意のマイナーでも満たすとき、その性質はマイナーに関して閉じているという.

補題 1.4 グラフ $G = (V, E)$ に対する任意のマイナーは G の部分グラフの縮約により得られる.

Proof.

辺の除去, 孤立点の除去, 縮約の操作をそれぞれ A, B, C とおき, それぞれの操作の順番を列

$$ABCACBAAB \dots$$

で表現するとする. このとき、 A, B の操作は G の部分グラフを生成する操作であるため、 CA および CB といった操作の C の順序を1番後ろにするような等価変換を与えればよい.

縮約する辺を $e = \{u, v\} \in E$ としたとき, u, v に隣接する頂点について以下の3つの場合に分類できる.

- 1). u に隣接する v を除く v に隣接していない頂点集合 $K \subset V$.
- 2). u と v にそれぞれ隣接する頂点集合 $L \subset V$.
- 3). v に隣接する u を除く u に隣接していない頂点集合 $M \subset V$.

e に隣接しない G の辺集合を E' , u, v を含まない G の頂点集合を V' とすれば, この3つの集合を用いて直和により E と V は

$$\begin{cases} V = V' + \{u, v\} \\ E = E' + \{e\} + \{\{u, w\} \mid w \in K + L\} + \{\{w, v\} \mid w \in L + M\} \end{cases}$$

とあらわすことができる. また, G/e に対する頂点集合と辺集合は

$$\begin{cases} V(G/e) = V' + \{u \text{ or } v\} = V' + V'' \\ E(G/e) = E' + \{\{u \text{ or } v, w\} \mid w \in K + L + M\} = E' + E'' \end{cases}$$

とあらわすことができる.

CA について考えると, A を E' に対して行っても縮約には影響を与えないため, $CA \rightarrow AC$ とすることができる. E'' に対して A をするとき, A の操作対象となる辺が K か M に隣接するときは E' に対して A をしたときと同様であるため, $CA \rightarrow AC$ とすることができる. L の頂点 $w \in L$ に隣接するときは $\{u, w\}, \{w, v\}$ に対して予め A をすればいいため, $CA \rightarrow AAC$ とすることができる.

CB について考えると, B を V' に対して行っても縮約には影響を与えないため, $CB \rightarrow BC$ とすることができる. また, V'' は孤立点を含む集合とは成りえないため, V'' について考える必要はない.

よって, 命題は証明された.

□

定理 1.4

グラフ H が G の位相的マイナーであることと, G が H の細分を部分グラフにもつことは同値である.

Proof.

G の任意の部分グラフは G の位相的マイナーであり, 細分により追加された頂点と辺は位相的マイナー操作による縮約で除去することができる. すなわち, G が H の細分を部分グラフにもつとき, H は G の位相的マイナーである. また, 補題 1.4 より G の任意の位相的マイナー H は G の部分グラフに対して位相的マイナー操作による縮約をすることで得られるため, G は H の細分を部分グラフにもつ.

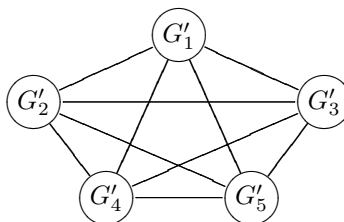
よって, 命題は証明された.

□

補題 1.5 K_5 もしくは $K_{3,3}$ がグラフ G の位相的マイナーとなる必要十分条件は K_5 もしくは $K_{3,3}$ が G のマイナーであることである.

Proof.

位相的マイナーはマイナーであるため, 必要性は明らかである. K_5 をマイナーとする G の最小の部分グラフを $G' \subseteq G$ とする. このとき, G' は G' の部分グラフ $G'_1, G'_2, \dots, G'_5 \subset G$ により

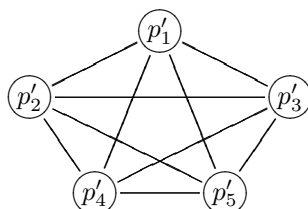


とあらわすことができ、 G'_1, G'_2, \dots, G'_5 は G' の最小性より木である。位相的マイナー操作による縮約により、 G'_1 に対してであれば、 G'_1 の頂点 $p'_1, p'_{11}, p'_{12} \in V(G'_1)$ を用いた

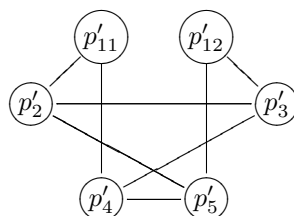


のいずれかに帰着することは明らかである。

G'_1, G'_2, \dots, G'_5 全てが左の場合については、 $p'_k \in V(G'_k)$ としたとき

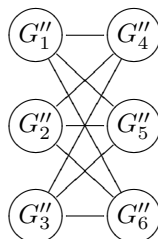


とあらわされ、 K_5 が G の位相的マイナーとなることがわかる。 G'_1 のみが右の場合になるときは

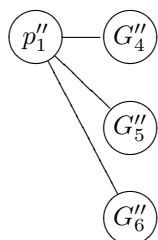


とあらわされるとから $K_{3,3}$ が G の位相的マイナーとなり、他の全ての場合でも $K_{3,3}$ が G の位相的マイナーとなることが確認できる。

同様に、 $K_{3,3}$ が G のマイナーのときは、 $K_{3,3}$ をマイナーとする G の最小の部分グラフを $G'' \subseteq G$ とすれば、 G'' は G' の部分グラフ $G''_1, G''_2, \dots, G''_6 \subset G$ により



とあらわされる。位相的マイナー操作による縮約により、 G''_1 に対してであれば、 G''_1 の頂点 $p''_1 \in V(G''_1)$ を用いた



のみである。これより、 $K_{3,3}$ が G のマイナーのときは $K_{3,3}$ が G の位相的マイナーである。

よって、命題は証明された。

□

補題 1.6 K_5 もしくは $K_{3,3}$ がグラフ G のマイナーでないとき、 G に対してマイナー操作をしても K_5 もしくは $K_{3,3}$ をマイナーにもつことはない。

Proof.

G に対して辺や孤立点の除去をしても K_5 もしくは $K_{3,3}$ をマイナーにもつことはないは明らかであるため、補題 1.4 と補題 1.5 により、位相的マイナー操作による縮約により K_5 もしくは $K_{3,3}$ を位相的マイナーにもつことはないことを示せばいい。

対偶をとれば、 G が K_5 もしくは $K_{3,3}$ を位相的マイナーにもつならば、位相的マイナー操作による縮約の逆によるグラフも K_5 もしくは $K_{3,3}$ を位相的マイナーにもつということである。位相的マイナー操作による縮約の逆とは細分のことであり、 K_5 もしくは $K_{3,3}$ を位相的マイナーにもつグラフをいくら細分しても K_5 もしくは $K_{3,3}$ を位相的マイナーにもつことは明らかである。

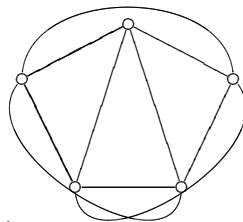
よって、命題は証明された。

□

補題 1.7 最小の非平面的グラフ G は 3-連結である。

Proof.

G は最小の非平面的グラフであるため、 G から 1 つでの辺や頂点を除去すれば平面的グラフとなる。実際、 K_5 は



となり、1 つでも辺や頂点を除去すれば平面的グラフとなるため、 G から 1 つでの辺や頂点を除去したとき平面的グラフにならないのは G の最小性に矛盾する。

G を非連結と仮定すれば、 G の連結成分 G' が存在し、 G' は G の真部分グラフであるため G の最小性より平面的グラフである。また、 G から G' を取り除いたグラフ $G - G'$ も平面的グラフとなるため G も平面的グラフとなり、これは G が非平面的グラフであることに矛盾するため、 G は 1-連結である。

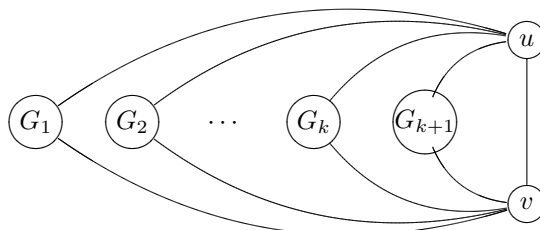
G が 2-連結でないとは仮定すれば、 G の切断点 $p \in V(G)$ が存在し、これにより生成される $G - p$ の連結成分 G'' および $G - p$ は G の最小性より平面的グラフである。また、 G から G'' を取り除いたグラフ $G - G''$ も平面的グラフとなる。 $V(G'')$ と p による G の誘導部分グラフ H_p と $V(G - G'')$ と p による G の誘導部分グラフ H'_p は

$$\begin{cases} V(H_p) \cap V(H'_p) = \{p\} \\ E(H_p) \cap E(H'_p) = \emptyset \end{cases}$$

といった関係式を満たすため H_p と H'_p は p で接続することで G に等しい。 H_p と H'_p は平面的グラフであるため G も平面的グラフとなり、これは G が 2-連結でない仮定に矛盾するため、 G は 2-連結である。

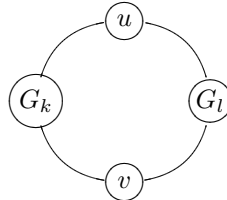
G が 3-連結でないとは仮定する。まずは、 G を $u, v \in V(G)$ で切断したときの n 個の連結成分を G_1, G_2, \dots, G_n としたとき、この仮定の下で辺 $\{u, v\}$ を加えたときに非平面的グラフとなる G_k が存在することを示す。

2-連結のときと同様にして、 $V(G_k)$ と u, v による G の誘導部分グラフを与え、それに対して辺 $\{u, v\}$ を加えたグラフを H_k とすれば、 H_1, H_2, \dots, H_n を辺 $\{u, v\}$ で接続することで G に等しくなる。 H_i と H_j を $\{u, v\}$ で接続することを $H_i + H_j$ とあらわすとして、 H_1, H_2, \dots, H_n が平面的グラフであると仮定したとき、数学的帰納法により $H_1 + H_2 + \dots + H_n$ が平面的グラフとなることを示す。 $k = 1$ のときは仮定より H_1 は平面的グラフであるから成り立ち、 k 以下で成り立つとしたとき $k + 1$ では

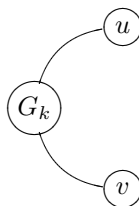


のようにあらわすことができる。なお、それぞれのグラフと頂点間の辺は便宜上単純であらわしているが、実際はそうではない場合をも含める。これより、 $H_1 + H_2 + \dots + H_n$ が平面的グラフ、すなわち G が平面的グラフとなる。これは G が非平面的グラフである仮定に矛盾するため、非平面的グラフである H_k が少なくとも1つ存在する。

辺 $\{u, v\}$ が G に含まれるとしたとき、非平面的グラフ H_k は G の部分グラフとなり、 G の最小性に矛盾するため G は辺 $\{u, v\}$ をもたない。このとき、 $k \neq l$ による G_l により



といった部分グラフを G はもつ。なお、それぞれのグラフと頂点間の辺は便宜上単純であらわしているが、実際はそうではない場合をも含める。 $V(G_k)$ と u, v による誘導部分グラフは上のグラフの左側、すなわち



となり、 u から G_l の頂点と v を経由した経路を加えたとき、 H_k の細分が生成される。これに対して G_l の頂点で縮約をすれば H_k となるが、 H_k は非平面的グラフであるため G の最小性に矛盾する。つまり、 G は3-連結である。

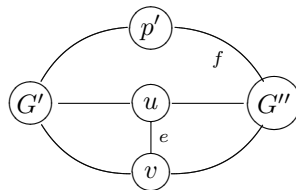
よって、命題は証明された。

□

補題 1.8 位数5以上の3-連結グラフ G について、 G/e としても3-連結となる $e = \{u, v\} \in E(G)$ が存在する。

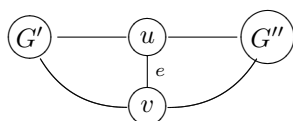
Proof.

G がどの辺を縮約しても3-連結とならないと仮定する。 G/e により生成される頂点を p_e としたとき、仮定より G/e は3-連結ではないため p_e, p'_e を G/e の切断点とする $p'_e \in V(G/e)$ が存在し、これは u, v, p'_e が G の切断点となるということである。このときに生成される2つの連結成分をそれぞれ G', G'' として、 $p_f \in V(G'')$ を用いて $f = \{p', p_f\}$ とする。

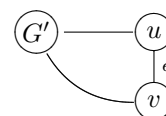


なお、それぞれのグラフと頂点間の辺は便宜上単純であらわしているが、実際はそうではない場合をも含め、 e, f はそこに辺が複数存在する場合はその内の1つを示すものである。

このとき、 p', p_f, p'' を G の切断点とする $p'' \in V(G)$ が存在しな位とすれば、 G を f で縮約すると G/f は3-連結となるため、 p'' は存在しなければならない。しかし、 G から p', p_f を除去したグラフは、 G は3-連結グラフであるため

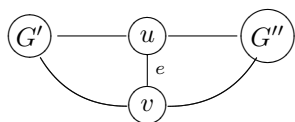


G'' のサイズが1以上のとき

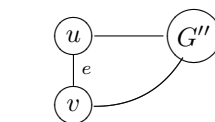


G'' のサイズが0のとき

の2つの場合となり、いずれの場合においても u, v のどちらかが p'' となることはなく、 G' に p'' が存在すると仮定しても、 G は3-連結グラフであるため、 G'' のサイズが1以上のときを例にとれば



G' のサイズが1以上のとき



G' のサイズが0のとき

となり、 p'' は存在しないため G がどの辺を縮約しても 3-連結とならないことに矛盾する。これは G'' のサイズが0の場合でも同様である。

よって、命題は証明された。

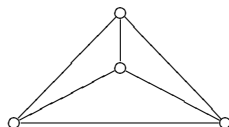
□

定理 1.5 クラトフスキーの定理

グラフ G が平面的グラフである必要十分条件は、 K_5 および $K_{3,3}$ が G の位相的マイナーでないことである。これをクラトフスキーの定理 (Kuratowski's theorem) という。

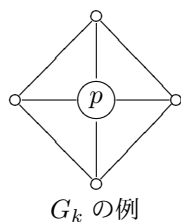
Proof.

必要性については明らかであるため、十分性について示す。補題 1.7 より G は 3-連結グラフであり、最小の 3-連結グラフは 4 頂点をもつ



のようなグラフ K_4 である。そこで、 G の位数 $k = |V(G)|$ に対する数学的帰納法により命題を示す。 $k = 4$ のときは K_4 が平面的グラフとなることから成り立つため、 k で成り立つとして $k + 1$ で成り立つことを示す。ここで、差別的に位数 k のグラフを G_k 、 $k + 1$ のグラフを G_{k+1} とあらわすとする。

補題 1.6 より、 G_k が K_5 もしくは $K_{3,3}$ を位相的マイナーにもつならば、 G_k に対して位相的マイナー操作の逆をしても K_5 もしくは $K_{3,3}$ は位相的マイナーのままである。また、仮定より $k + 1 \geq 5$ であるため、補題 1.8 より G_{k+1} は縮約しても 3-連結となる辺 $e \in E(G_{k+1})$ が存在する。つまり、 G_{k+1} は G_k に対して縮約の逆をすることで生成可能である。 G_k に対して縮約の逆をする頂点を $p \in V(G_k)$ とすれば、 G_k は 3-連結であるため $G_k - p$ は 2-連結となるため、定理 1.2 より p は閉路の中に存在する頂点として考えることができる。

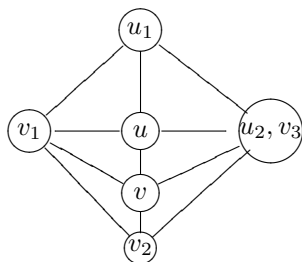


G_k の例

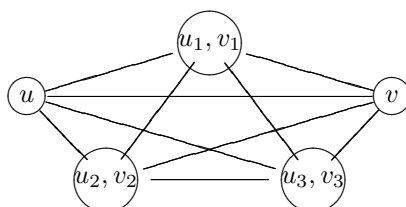
G_k から縮約の逆により与えられる頂点を $u, v \in V(G_{k+1})$ としたとき、 v を除く u に隣接する頂点を $u_1, u_2, \dots, u_m \in V(G_{k+1})$ 、 u を除く v に隣接する頂点を $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(G_{k+1})$ とする。 G_{k+1} は 3-連結であるため、 $m, n \geq 2$ である。このとき、 u_1, u_2, \dots, u_m と v_1, v_2, \dots, v_n について、以下の場合に分類される。

- 1). v_1, v_2, \dots, v_n が u_1, u_2, \dots, u_m の間に存在する。もしくはその逆。
- 2). 3 個以上の u_k と v_k が共有している。
- 3). 上記以外。

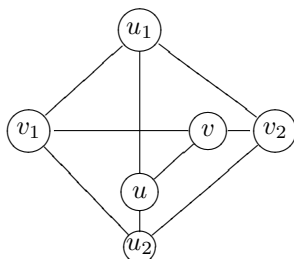
1) のときは



のように明らかに平面的グラフとなる. 2) のときは



を含むグラフとなり, K_5 が位相的マイナーとなる. 3) のときは簡単化することで u_k と v_k が交互に並ぶことと, u_k と v_k が2つまで共有することを許すものとなる. 例えば, u_k と v_k が交互に並ぶとき



のように非平面的グラフなり, $K_{3,3}$ が位相的マイナーとなる. u_k と v_k が共有するものが存在するときは, 共有するペアが1個のときは共有をしていないペアが2つ以上存在し, 共有するペアが2個のときは共有をしていないペアが1つ以上存在する. 共有するペアが1個のときは u_k と v_k が交互に並ぶときの場合に帰着するため, 非平面的グラフとなり $K_{3,3}$ を位相的マイナーにもつ. 共有するペアが2個のときはそれぞれのペアで u_k と v_k のどちらかのみを考える, すなわちペア $\{u_i, v_i\}, \{u_j, v_j\}$ が与えられたとき u_i, v_j として考えることで u_k と v_k が交互に並ぶときの場合に帰着するため, 非平面的グラフとなり $K_{3,3}$ を位相的マイナーにもつ. 以上より, $k+1$ の場合でも K_5 もしくは $K_{3,3}$ を位相的マイナーにもたないならば平面的グラフであることがわかる.

よって, 命題は証明された.

□

定理 1.6 ワグナーの定理

グラフ G が平面的グラフである必要十分条件は, K_5 および $K_{3,3}$ が G のマイナーでないことである. これをワグナーの定理 (Wagner's theorem) という.

Proof.

補題 1.5 により定理 1.5 へと帰着するため, 命題は成り立つ.

よって, 命題は証明された.

□