古典力学 -質点の運動-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

初回更新 2018 年 8 月 12 日
最終更新 2018 年 12 月 28 日

目次

第 1 章

運動の法則

1.1 運動の定義

定義 1.

物体が時間によって位置を変えることを**運動**という．また，その位置は**変位**といい，単位は m を用いて**メートル**という．

物体の変位を時間 t に依存する 3 次元のベクトル $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)[m]$ とあらわしたとき，t から $t + \Delta t$ における平均変化率を**速度**といい，単位は m/s である．一般に，$\Delta t \to 0$ として $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)[m/s]$ を用いて以下のようにあらわされる．

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{x}(t + \Delta t) - \boldsymbol{x}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$$

また，速度の t から $t + \Delta t$ における平均変化率を**加速度**といい，単位は m/s^2 である．一般に $\Delta t \to 0$ として $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)[m/s^2]$ を用いて以下のようにあらわされる．

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2}$$

微分積分学の基本定理より，任意の時間 t_0 における速度 $\boldsymbol{v}_0$ および変位 $\boldsymbol{x}_0$ が与えられたとき，加速度 $\boldsymbol{a}$ から以下のようにして対応する速度 $\boldsymbol{v}$ および変位 $\boldsymbol{x}$ を求めることができる．

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(\tau)\mathrm{d}\tau =& \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}_0 \\
\boldsymbol{v}(t) =& \boldsymbol{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(\tau)\mathrm{d}\tau \\
\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(\tau)\mathrm{d}\tau =& \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0 \\
\boldsymbol{x}(t) =& \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

特に，$\boldsymbol{v} = constant$ となる運動を**等速直線運動**といい，$\boldsymbol{a} = constant$ となる運動を**等加速度直線運動**という．
また，ベクトルの微分に関する線型性より，速度や加速度は成分ごとに分解して考えることができる．

定義 2.

物体が重力のみを受け，初速度 $\mathbf{0}$ で落下する運動を**自由落下**という．ガリレオ・ガリレイの実験によれば，空気抵抗を無視した自由落下は物体の重さに関係ないとされ，一定の加速度で運動する．このときの加速度を**重力加速度**といい，$\boldsymbol{g}$ とあらわす．また，地球上での重力加速度は $|\boldsymbol{g}| \fallingdotseq 9.806$ である．

地球上と月での重力加速度を比較すると，月での重力加速度は地球の約 $\frac{1}{6}$ である．つまり，重さというのは重力に依存する．そこで，重力に依存しない重さの単位の定義を与える．

定義 3.

物体に対する重力の大きさを**重さ**という．重力に依存しない重さの指標を**質量**といい，単位は g を用いて**グラム**という．通常は単位を kg として扱う．

物体の重さは比例定数を $\boldsymbol{g}$ としたとき質量に比例し，重さは以下のようにして与えられる．なお，$m[kg]$ は質量で $\boldsymbol{W}[N]$ は重さである．

$$\boldsymbol{W} = m\boldsymbol{g}$$

また，単位 $N = kg \cdot m/s^2$ を**ニュートン**という．特に，N によってあらわされた量を**力**といい，加速度の線型性より力を成分ごとに分解して考えることができる．また，力の和のことを**合力**という．

1.2　運動の法則

アイザック・ニュートンによって以下の 3 つの運動の法則が発見された．

運動の第 1 法則

物体に作用する力の合力が $\mathbf{0}$ であるとき，その物体は等速直線運動をする．また，これは逆も成り立ち，この法則を**慣性の法則**という．

宇宙のうち，考察の対象とする部分を**系**といい，考察の対象としない部分を**外界**という．系のうち，慣性の法則が成り立つ座標系を**慣性系**といい，成り立たない座標系を**非慣性系**という．

運動の第 2 法則

物体に力が作用するとき，物体には合力の方向の加速度が生じ，それは合力の大きさに比例し，質量に反比例する．また，物体に対する質量と速度の積を**運動量**といい，物体に作用する力の合力 $\boldsymbol{F}[N]$ とその運動量 $\boldsymbol{p}[kg \cdot m/s]$ に対して以下の微分方程式が成立する．

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

これを**ニュートンの運動方程式**といい，この法則を特に**運動の法則**という．また，運動方程式は同じ慣性系においては慣性の法則を内包する．

運動方程式の導入により，慣性系と非慣性系における物理現象の解析が可能となる．非慣性系は系の内部で力が作用していないとき系の内部で等速直線運動をしないことである．つまり，非慣性系とは宇宙から見て加速度運動をしている系のことである．運動方程式によれば，加速度があれば力が生じるため，非慣性系内部で仮想的な力が作用しているすれば慣性の法則を成り立つとみなすことができる．このような力を**慣性力**といい，非慣性系 S が宇宙から見て加速度 $\boldsymbol{a}_S$ で運動しているとき，S 内の質量 m の物体に対して力 $\boldsymbol{F}$ が作用するならば，物体の運動量 $\boldsymbol{p}$ に対して以下の運動方程式が成り立つ．

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} - m\boldsymbol{a}_s$$

慣性系 S_1, S_2 において，慣性系の定義よりこれら等速直線運動をしている．S_1 から見た S_2 の相対速度を $\boldsymbol{v}_{S_1S_2}$ としたとき，これは一定である．慣性系を 4 元ベクトル $(t, \boldsymbol{x})$ であらわしたとき，それぞれの慣性系について $(t_{S_1}, \boldsymbol{x}_{S_1}), (t_{S_2}, \boldsymbol{x}_{S_2})$ とあらわすとする．このとき，以下の関係式が成り立つという主張を**ガリレイの相対性原理**といい，この変換を**ガリレイ変換**という．

$$(t_{S_2}, \boldsymbol{x}_{S_2}) = (t_{S_1}, \boldsymbol{x}_{S_1} - t\boldsymbol{v}_{S_1S_2})$$

これが古典力学における 1 つの終着点であり，これは全ての慣性系は同様に物理法則を満たし，時間は絶対的な量であるというものである．このような力学体系を**ニュートン力学**という．

しかし，これはマイケルソン・モーリーの実験により，慣性系でも光速に近い運動では物理法則に乖離することが知られており，これらをアルベルト・アインシュタインが理論構築し，その理論が**特殊相対性理論**である．

運動の第 3 法則

物体 A が物体 B に力 $\boldsymbol{F}_{A\to B}$ が作用するとき，物体 B は物体 A に力 $-\boldsymbol{F}_{A\to B}$ が作用する．この法則を**作用反作用の法則**という．

物体系に作用する力のうち，物体系の外から作用する力を**外力**といい，物体系の内で作用する力を**内力**という．例えば，地球上での物体系を考えるとき重力は内力であるが，地球を含めない物体系として考えるとき重力は外力である．

作用反作用の法則は 2 つの物体に対する物体系 A, B があり，A が B に力を作用させるなら，それとは逆方向で同じ力が B から A に作用して，それらの力はそれぞれ外力であるということである．

また，変位が一意的に求まり質量をもつが，体積や変形のない点としてあらわされる物質を**質点**という．質点を用いた運動は比較的簡単にあらわされることから，ほとんどの場合で質点による運動方程式が用いられる．

1.3　万有引力

ヨハネス・ケプラーによって以下の 3 つの惑星に関する運動の法則が発見された．

ケプラーの法則

(1) 惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道をする．

(2) 惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は一定である．また，このことを**面積速度**という．

(3) 惑星の公転周期の 2 乗は長半径の 3 乗に比例する．

ここで，ケプラーの法則に則って運動を考える．まず，デカルト座標系の z 軸を回転軸とした xy 平面での離心率 ε と半直弦 l に対する 1 つの焦点を中心とする楕円軌道は，角度 $\theta = \theta(t)$ を用いて極座標で以下のようにあらわされる．

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos\theta}$$

よって，デカルト座標系における加速度 $\boldsymbol{a}$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} =&(r'' \cos\theta - 2r'r\theta' \sin\theta - r(\theta'' \sin\theta + \theta'^2 \cos\theta),\\ &r'' \sin\theta + 2r'r\theta' \cos\theta + r(\theta'' \cos\theta - \theta'^2 \sin\theta))\end{aligned}$$

力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$ を極座標による角 θ だけデカルト座標系から回転した回転座標系による $\boldsymbol{F} = (F_r, F_\theta)$ を考える．これは基底変換により以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

これを用いて運動方程式を構築する．

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix} =&m \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'' \cos\theta - 2r'r\theta' \sin\theta - r(\theta'' \sin\theta + \theta'^2 \cos\theta) \\ r'' \sin\theta + 2r'r\theta' \cos\theta + r(\theta'' \cos\theta - \theta'^2 \sin\theta) \end{pmatrix}\\ =&m \begin{pmatrix} r'' - r\theta'^2 \\ 2r'r\theta' + r\theta'' \end{pmatrix}\\ =&m \begin{pmatrix} r'' - r\theta'^2 \\ \frac{1}{r}(r^2\theta')' \end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，極座標による運動方程式の定義が与えられる．

定義 4.

質量 m に対する物体に $\boldsymbol{F}$ が作用するとき，デカルト座標系 (x, y, z) に対する極座標系 (r, θ, z) では，デカルト座標系から z 軸を中心に θ だけ回転した座標系を考えることで以下の運動方程式が成立する．

$$\begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} r'' - r\theta'^2 \\ \frac{1}{r}(r^2\theta')' \\ z'' \end{pmatrix}$$

ケプラーの第 2 法則より楕円は局所的に円とみなせることから定数 k を用いて以下の関係式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}r^2\theta' = k$$

これを用いて運動方程式を変形する．

$$\begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} r'' - \frac{r(2k)^2}{r^4} \\ \frac{1}{r}(2k)' \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} r'' - \frac{(2k)^2}{r^3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで，r の導関数を計算する．

$$\begin{aligned} \left(\frac{l}{r}\right)' =& (1+\varepsilon\cos\theta)' \\ -\frac{lr'}{r^2} =& -\varepsilon\theta'\sin\theta \\ r' =& \frac{2k\varepsilon}{l}\sin\theta \\ r'' =& \frac{2k\varepsilon}{l}\theta'\cos\theta \\ =& \frac{(2k)^2}{lr^2}\left(\frac{l}{r}-1\right) \\ =& \frac{(2k)^2}{r^3} - \frac{(2k)^2}{lr^2} \end{aligned}$$

また，k は面積速度であることから軌道中の楕円の面積 S を用いて公転周期 T は以下のようになる．なお，軌道における長半径を a，短半径を b とする．

$$T = \frac{S}{k} = \frac{\pi ab}{k}$$

ケプラーの第 3 法則により，定数 c を用いて以下の関係式が成り立つ．

$$c = \frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 b^2}{ak^2} = \frac{\pi^2 l}{k^2}$$

よって，惑星が太陽から受ける力についての運動方程式は以下のようになる．

$$F_r = m\left(\frac{(2k)^2}{r^3} - \frac{(2k)^2}{lr^2} - \frac{(2k)^2}{r^3}\right) = -m\frac{4\pi^2}{cr^2}$$

これは，惑星が太陽から受ける力が惑星の質量に比例して距離の 2 乗に反比例し，引力として作用することを示している．作用反作用の法則を考えると，太陽も惑星から太陽の質量に比例した力が作用することが考えられる．よって，この引力は太陽の質量にも比例していると考えるのが合理的である．

アイザック・ニュートンはこのことを 1 つの結論として以下の法則を導き出した．

万有引力の法則

質量 $m_1[kg], m_2[kg]$ の物体間では引力が働き，その距離を $r[m]$ としたとき引力の大きさ $F[N]$ は定数 G を用いて以下のようにあらわされる．

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

これを**万有引力の法則**といい，G を**万有引力定数**という．

$$G \fallingdotseq 6.6743 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$$

また，一般に m_1 を中心として見た m_2 における重力加速度は以下のようにして求めるられる．なお，$\boldsymbol{r}$ は m_1 から見た位置ベクトルであるとする．

$$\begin{aligned} m_2\boldsymbol{g} =& -G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{g} =& -G\frac{m_1}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r} \end{aligned}$$

1.4　仕事と力学的エネルギー

定義 5.

$\boldsymbol{x}_a[m]$ を始点とし，$\boldsymbol{x}_b[m]$ を終点とする経路 C で物体を力 $\boldsymbol{F}[N]$ で動かしたとする．このとき，物体は**仕事**をしたといい，$W[J]$ を用いて以下のように定義する．

$$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

また，単位 $J = N \cdot m$ を**ジュール**という．

この仕事が $t[s]$ 間行われていたとし，仕事の平均を**仕事率**といい，$P[W]$ を用いて以下のようになる．

$$P = \frac{W}{t}$$

$t \to 0$ としたとき，平均仕事率は瞬間の仕事率であり，それは以下のようになる．

$$P = \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}}{t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

また，単位 $W = J/s = N \cdot m/s$ を**ワット**という．

定義 6.

$\boldsymbol{x}_a[m]$ を始点とし，$\boldsymbol{x}_b[m]$ を終点とする経路 C で質量 m の物体を力 $\boldsymbol{F}[N]$ で動かしたとする．$\boldsymbol{F}$ に対するスカラーポテンシャル $\boldsymbol{F} = -\nabla U$ が存在するとき，$\boldsymbol{F}$ を保存力といい，存在しないときを**非保存力**という．U を**ポテンシャルエネルギー**もしくは**位置エネルギー**といい，$\boldsymbol{F}$ の線積分は始点と終点のみに依存することから以下のようにして求めることができる．

$$U = -\int_{\boldsymbol{x}_a}^{\boldsymbol{x}_b} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

また，保存力 $\boldsymbol{F}$ で仕事を質点に対してあらわしたものを**運動エネルギー**といい，$T_{a \to b}$ を用いて以下のようにあらわす．なお，経路で物体は $\boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_b$ でそれぞれ速度 $\boldsymbol{v}_a[m/s], \boldsymbol{v}_b[m/s]$ で運動していたとする．

$$T_{a \to b} = \int_{\boldsymbol{x}_a}^{\boldsymbol{x}_b} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\boldsymbol{x}_a}^{\boldsymbol{x}_b} m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = m \int_{\boldsymbol{v}_a}^{\boldsymbol{v}_b} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_b|^2 - \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}_a|^2$$

よって，運動エネルギーは一般に以下のようになる．

$$T = \frac{1}{2} m |\boldsymbol{v}|^2$$

例えば，原点を中心とした重力による位置 $\boldsymbol{x}$ に対するポテンシャルエネルギーは以下のようにして求めることができる．

$$U = -\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{x}} m\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -m\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{x}$$

また，$g = |\boldsymbol{g}|$ としたとき，デカルト座標系では $\boldsymbol{g} = (0, 0, -g)$ となるため，$U = mgx_z$ となる．

同様にして，万有引力による位置エネルギーは無限遠点を基準とすれば以下のようになる．なお，質量 M の物体を中心とした質量 m の物体の受ける万有引力で距離を r とする．

$$U = -\int_{\infty}^{r} \left(-G \frac{Mm}{r^2} \mathrm{d}r \right) = -GMm \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r} = -G \frac{Mm}{r}$$

質量 m の物体に保存力 $\boldsymbol{F}$ が作用するとき，運動方程式を両辺に速度 $\boldsymbol{v}$ をかけて時間積分をする．なお，変数変換に

より任意の経路 $\boldsymbol{x}_a \to \boldsymbol{x}_b$ とそれぞれの位置における速度 $\boldsymbol{v}_a, \boldsymbol{v}_b$ を用いるものとする．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} &= -\nabla U(\boldsymbol{x}) \\
m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v} &= -\nabla U(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v} \\
\int_{\boldsymbol{v}_a}^{\boldsymbol{v}_b} m\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t &= -\int_{\boldsymbol{x}_a}^{\boldsymbol{x}_b}\nabla U(\boldsymbol{x})\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_a|^2 + U(\boldsymbol{x}_a) &= \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_b|^2 + U(\boldsymbol{x}_b)
\end{aligned}
$$

これより，運動エネルギー T を用いれば以下の式が成り立つ．

$$
T(\boldsymbol{v}) + U(\boldsymbol{x}) = constant
$$

よって運動エネルギーと位置エネルギーについて以下の定義を与えることができる．

定義 7.

物体の運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U の和 $E = T + U$ を**力学的エネルギー**という．
これは保存力のみが作用するとき一定であり，このことを**力学的エネルギー保存則**という．

1.5　非保存力

定義 8.

物体が運動をするとき，物体の表面や運動に抗うように作用する力を**抗力**という．抗力には物体の表面に対して垂直に作用する抗力と物体表面に対して沿うように作用する抗力の 2 つがある．

作用反作用によって発生する力も抗力であるが，宇宙から見ればそれらは打ち消しあっているため保存力である．その代表例は，物体 A, B が接触しているとき，A と B の接触点では A が B を押す力とその反作用として作用する B が A を押し返す抗力が存在する．このような抗力を**垂直抗力**といい，その大きさは作用反作用の法則より A が B を押す力に等しい．

非保存力とは力 $\boldsymbol{F}$ がポテンシャルエネルギーによって $\boldsymbol{F} = -\nabla U$ とあらわすことのできない力のことであり，力学的エネルギー保存則を用いれば，運動によって散逸するエネルギーのことである．一般に，これは運動方向に対する抗力であることから，速度 $\boldsymbol{v}$ に対する以下の単位ベクトルを定義する．

$$
\hat{\boldsymbol{v}} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & (|\boldsymbol{v}| = 0) \\ \dfrac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} & (other) \end{cases}
$$

よって，質量 m の物体に対して保存力と非保存力の和 $-\nabla U - f(|\boldsymbol{v}|)\hat{\boldsymbol{v}}$ が作用するとき，その運動方程式は以下のようにあらわすことができる．

$$
m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla U - f(|\boldsymbol{v}|)\hat{\boldsymbol{v}}
$$

力学的エネルギーの導入と同様にして，両辺に速度 $\boldsymbol{v}$ をかける．なお，力学的エネルギーを E とあらわすとする．

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v} &= -\nabla U\cdot\boldsymbol{v} - f(|\boldsymbol{v}|)|\boldsymbol{v}| \\
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= -f(|\boldsymbol{v}|)|\boldsymbol{v}|
\end{aligned}
$$

このように，非保存力が仕事をすると力学的エネルギーが時間変化とともに減少することがわかる．また，非保存力は仕事の経路に依存することから，時間および変位や速度に依存する力は非保存力であるとすることができる．

非保存力の例として，物体同士が接触しているときに相対運動をすると生じる抗力を**摩擦力**という．摩擦力には，静止状態から動き始めるために生じる**静止摩擦力**と運動している物体同士の相対速度を $\boldsymbol{0}$ にするような**動摩擦力**がある．

これらは接触面の垂直抗力に比例するとされており，垂直抗力の大きさ N に対して静止摩擦力 $\boldsymbol{F_0}$ と動摩擦力 $\boldsymbol{F}'$ は係数 μ, μ' および $\boldsymbol{v}$ を正規化したベクトル $\hat{\boldsymbol{v}}$ を用いて以下のようにあらわされる．

$$\boldsymbol{F}_0 = -\mu N\hat{\boldsymbol{v}},\ \boldsymbol{F}' = -\mu' N\hat{\boldsymbol{v}}$$

このとき，μ を**静止摩擦係数**，μ' を**動摩擦係数**といい，これは接触面と物体の材料に依存する．また，一般に $\mu \geq \mu'$ が成り立つ．なお，静止摩擦力に関しては物体は動かない，すなわち仕事をしないため保存力である．

空気中では大気圧が生じるため，空気の存在する系の物体は空気による垂直抗力を受ける．このような空気に対する抗力を**空気抵抗**という．空気による流体の速度場を形成されていないとすれば，低速運動時には速度に比例した**粘性抵抗**が作用し，高速運動時には速度の 2 乗に比例した**慣性抵抗**が作用するといわれている．このとき，粘性抵抗 $\boldsymbol{f}_v$ は比例定数 μ により

$$\boldsymbol{f}_v = -\mu\boldsymbol{v}$$

といった近似を与えることができ，μ を**粘性係数**という．同様にして慣性抵抗 $\boldsymbol{f}_i$ は比例定数 ρ により

$$\boldsymbol{f}_i = -\rho|\boldsymbol{v}|^2\hat{\boldsymbol{v}}$$

といった近似を与えることができ，ρ を**慣性係数**という．

このとき，それぞれの係数は空気といった流体の粘度や物体の表面積，速度勾配といったものが包含されている．

1.6　運動量保存則

運動量保存則

慣性系に対して外力が作用しないとき，慣性系内に存在する運動量 $\boldsymbol{p}$ について以下の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{p} &= constant\end{aligned}$$

このように外力が無ければ運動量が一定であることを**運動量保存則**という．

t_1 から t_2 の間で慣性系に対して外力 $\boldsymbol{F}$ が作用したとき，以下のようにして運動量の変化量が求めることができる．

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t$$

この力の時間積分を**力積**という．

慣性系内に存在する質量 m_1, m_2 の物体がそれぞれ速度 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ で運動をしているとする．これらが衝突し，その後の速度をそれぞれ $\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2'$ とする．このとき，慣性系で運動量が保存されることから以下の等式が成り立つ．

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{v}_1' + m_2\boldsymbol{v}_2'$$

また，一般に衝突時には物体が変形したり衝突音が発生するため力学的エネルギーは保存されない．しかし，十分に堅い球が衝突したときは物体が変形をすることがないためエネルギー損失を無視することができる．このような衝突を**弾性衝突**といい，以下の式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\boldsymbol{v}_2|^2 = \frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{v}_1'|^2 + \frac{1}{2}m_2|\boldsymbol{v}_2'|^2$$

また，上式が成り立たないような衝突を**非弾性衝突**という．

第 2 章

回転運動

2.1 回転の運動方程式

円軌道の運動を考える．デカルト座標系の z 軸を回転軸とした xy 平面での円軌道を示す変位 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ は，定数 ω を用いた回転角 $\theta(t) = \omega t$ によって以下のようにあらわされる．なお，r は円軌道の半径で θ_0 は初期位相角である．

$$\boldsymbol{x} = r(\cos(\theta + \theta_0), \sin(\theta + \theta_0), 0)$$

このとき，ω を**角速度**という．これを時間微分して速度 $\boldsymbol{v}$ と加速度 $\boldsymbol{a}$ を算出する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} =& r(-\omega\sin(\theta + \theta_0), \omega\cos(\theta + \theta_0), 0) = r\omega(-\sin(\theta + \theta_0), \cos(\theta + \theta_0), 0)\\ \boldsymbol{a} =& r\omega(-\omega\cos(\theta + \theta_0), -\omega\sin(\theta + \theta_0), 0) = -\omega^2\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積をとる．

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v} = r^2\omega(-\cos(\theta + \theta_0)\sin(\theta + \theta_0) + \cos(\theta + \theta_0)\sin(\theta + \theta_0)) = 0$$

よって，$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{v}$ である．また，変位と速度，角速度の絶対値をとることで以下の関係式が得られる．

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}| =& r\\ |\boldsymbol{v}| =& r\omega\\ |\boldsymbol{a}| =& r\omega^2\end{aligned}$$

このように言って角速度に対して一定速度で運動をし，このような運動を**等速円運動**という．また，運動方程式より力は円運動の中心方向に働くことがわかる．このような力を**向心力**という．回転運動は加速度を伴うことから回転運動と連携するような回転座標系では向心力とは逆向きで同じ大きさの慣性力を導入する必要がある．この慣性力を**遠心力**という．

回転運動による 1 秒あたりの回転を**回転数**もしくは**周波数**といい，回転をするのにかかる時間を**周期**という．円運動の一周は $2\pi r$ であることから周期 T およびは周波数 f 以下のようになる．

$$\begin{aligned}T =& \frac{2\pi r}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{2\pi}{\omega}\\ f =& \frac{1}{T}\end{aligned}$$

このように単純な回転運動を示すことは可能であるが，複雑な回転運動を示すことは困難である．そこで，どの程度回転しているかの新しい指標を定義する．円運動をするときが最も回転らしいとすれば，変位と速度が垂直であればあるほど回転の力が大きいという指標を回転軸方向に対応するように運動量 $\boldsymbol{p}$ および回転軸からの変位 $\boldsymbol{x}_r$ により

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x}_r \times \boldsymbol{p}$$

と定義すれば，これを運動量に対応する量として**角運動量**といい，単位は $m \cdot N \cdot m$ である．運動方程式と整合性をもたせるため力に関しても同様に

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{x}_r \times \boldsymbol{F}$$

と定義し，これを**力のモーメント**もしくは**トルク**といい，単位は $N \cdot m$ である．また，$\boldsymbol{x}_r$ か回転軸からの変位，すなわち回転軸上の任意の位置からの変位であるが，このとき角運動量およびトルクにおける外積は不変であるため実際に回転軸上の任意の位置からの変位を考えることができる．

ここで，角速度に対する定理を与える．

無限小回転

回転軸を示す単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ に対して角度 $\theta = \theta(t)$ だけ回転軸からの変位 $\boldsymbol{x}_r$ を回転させるとする．このことを示す回転行列を $R(\theta)$，角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n}$ と定義したとき，この回転による $\boldsymbol{x}_r$ の速度 $\boldsymbol{v}$ について

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}_r = R^T(\theta)\frac{\mathrm{d}R(\theta)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_r$$

が成り立つ．

Proof.

微小時間を Δt とすれば，$\boldsymbol{x}_r$ を $\boldsymbol{n}$ を中心に Δt の時間だけ回転させたときの瞬間の時間変化率を考える．このとき，$\boldsymbol{x}_r$ 自体は運動をせず，$R(\theta)$ によって運動をする，すなわち $R(\theta)\boldsymbol{x}_r$ が運動する．つまり，$\boldsymbol{x}_r$ における速度 $\boldsymbol{v}$ を考えるのではなく，$\boldsymbol{x}_r$ を $R(\theta)$ だけ回転させた位置 $R(\theta)\boldsymbol{x}_r$ における速度 $R(\theta)\boldsymbol{v}$ を考えるとする．$\boldsymbol{x}_r$ 自体は時間に依存しないため，$R(\theta)\boldsymbol{x}_r$ における速度について

$$\begin{aligned} R(\theta)\boldsymbol{v} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(\theta(t+\Delta t))\boldsymbol{x}_r - R(\theta(t))\boldsymbol{x}_r}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}R(\theta)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{v} &= R^T(\theta)\frac{\mathrm{d}R(\theta)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_r \end{aligned}$$

といった関係式が成り立つ．

また，$\boldsymbol{r} = R(\theta)\boldsymbol{x}_r$ とおいたときの Δt による変化量を

$$\Delta\boldsymbol{r} = R(\theta(t+\Delta t))\boldsymbol{x}_r - R(\theta(t))\boldsymbol{x}_r$$

として行列 μ を用いて $\Delta\boldsymbol{r} = \mu\boldsymbol{r}$ となるとすれば，$R(\theta(t+\Delta t))\boldsymbol{x}_r$ について

$$R(\theta(t+\Delta t))\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r} = (I+\mu)\boldsymbol{r}$$

となる．なお，I は単位行列である．

ここで，回転行列 $I+\mu$ は $\boldsymbol{r}$ を回転させる行列であることから回転行列 $A = I+\mu$ と定義すれば，仮定より A の逆行列は存在するため

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (I+\mu)^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-\mu)^k \end{aligned}$$

とあらわされる．また，$A^T = A^{-1}$ であることから

$$\begin{aligned} I + \mu^T &= \sum_{k=0}^{\infty}(-\mu)^k \\ \mu^T &= -\mu + \mu^2 + \cdots \end{aligned}$$

となり，$\Delta t \to 0$ で $\theta(t+\Delta t) - \theta(t) \to 0$ となるため $\Delta t \to 0$ において $\mu^T = -\mu$ となる．よって，無限小回転において μ は交代行列であり，a, b, c を用いて

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

とあらわされるとすることができ，$\Delta\boldsymbol{\Omega} = (a, b, c)$ とすれば $\Delta\boldsymbol{r}$ は

$$\Delta\boldsymbol{r} = \mu\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

とあらわすことができる．

以上より，$\Delta\boldsymbol{\Omega}$ は $\boldsymbol{r}$ を微小時間においての $\boldsymbol{n}$ を回転軸とする微小回転量を示すベクトルであり，微小回転角 $\Delta\theta$ を用いて $\Delta\boldsymbol{\Omega} = \Delta\theta\boldsymbol{n}$ となる．μ についての関係式の仮定 $\Delta t \to 0$ に基づきこれを導関数の定義式に代入することで

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(\theta(t+\Delta t))\boldsymbol{x} - R(\theta(t))\boldsymbol{x}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta\boldsymbol{n}}{\Delta t} \times \boldsymbol{r} \\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{n} \times (R(\theta)\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{\omega} \times (R(\theta)\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

となる．

$R(\theta)$ は $\boldsymbol{n}$ の周りの変換であることから

$$R(\theta)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$$

であり，回転行列は直交変換を示す行列であるため，適当なベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて

$$R(\theta)(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (R(\theta)\boldsymbol{a}) \times (R(\theta)\boldsymbol{b})$$

を満たす．つまり，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}R(\theta)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x} &= R(\theta)(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) \\
R^T(\theta)\frac{\mathrm{d}R(\theta)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

といった関係式が得られる．

よって，命題は証明された．

□

速度と角速度の関係を用いることで運動量の式を変形する．なお，質量 m の物体についての式であるとする．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{x}_r \times (m\boldsymbol{v}) \\
&= m\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) \\
&= m|\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{\omega} - m(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

これは角運動量が回転軸方向以外に角運動量をもっているということを示しており，$\boldsymbol{x}_r \perp \boldsymbol{\omega}$ であるならば $\boldsymbol{x}_r$ の係数は 0 であるため，これは任意の回転軸を選択したときの補正項であることを示している．また，これを $\boldsymbol{\omega}$ についての変換の式であらわす．なお，$\boldsymbol{x}_r = (x, y, z)$ で $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ とする．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= m|\boldsymbol{x}_r|^2\boldsymbol{\omega} - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)\boldsymbol{x}_r \\
&= m\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -yx & -zx \\ -xy & x^2+z^2 & -zy \\ -xz & -yz & x^2+z^2 \end{pmatrix}\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

この回転運動が並進運動を一切伴わないとき，$\boldsymbol{\omega}$ を変換する行列は $\boldsymbol{\omega}$ を軸に回転をすることから運動によらず固定量である．この量を**慣性モーメントテンソル**もしくは**慣性テンソル**といい，単位は $kg \cdot m^2$ である．また，この行列の対角成分を**慣性モーメント係数**といい，それ以外の成分を**慣性乗積**という．このとき，慣性テンソル I を用いれば回転に関する運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}$$

となる．

よって，回転の運動方程式について以下のようにまとめることができる．

回転の運動方程式

単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の周りで回転している質量 m の物体に対して，物体に力 $\boldsymbol{F}$ が作用し，そのトルクを回転軸上からの変位 $\boldsymbol{x}_r = (x, y, z)$ について $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{x}_r \times \boldsymbol{F}$ とあらわす．このとき，慣性テンソル I を

$$I = m \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -yx & -zx \\ -xy & x^2+z^2 & -zy \\ -xz & -yz & x^2+z^2 \end{pmatrix}$$

と定義する．このとき，角運動量 $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$ に対して回転の運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}$$

と定義される．特に，トルクが作用しないとき I は一定となり，回転運動の運動方程式は

$$I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}$$

とあらわすことができる．

また，$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ を**角加速度**といい，$\boldsymbol{\alpha}$ を用いてあらわすことがある．

一般に，トルクが作用するときは慣性テンソルが変数になるため，モータのような回転軸に対して物体が拘束された運動や自転運動を示すのに適している．

また，回転運動の運動方程式についての座標系を任意の回転軸で θ だけ回転させることを考える．この変換を示す回転行列を $R(\theta)$ としたとき，新しく変換後の角運動量 $\boldsymbol{L}_R = R(\theta)\boldsymbol{L}$ と角速度 $\boldsymbol{\omega}_R = R(\theta)\boldsymbol{\omega}$ を定義すれば，$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$ に対して以下のようにあらわすことができる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} =& I\boldsymbol{\omega} \\ R(\theta)\boldsymbol{L} =& R(\theta)I\boldsymbol{\omega} \\ R(\theta)\boldsymbol{L} =& R(\theta)IR^T(\theta)R(\theta)\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{L}_R =& R(\theta)IR^T(\theta)\boldsymbol{\omega}_R \end{aligned}$$

つまり，$R(\theta)$ を用いた直交変換によって座標系を変換するとき，I を相似変換することによってあらわすことができる．また，I は対称行列であることから直交行列によって対角化が必ずできる．このときの座標軸を**慣性主軸**といい，慣性テンソルを**主慣性モーメント**という．

このようにして，回転運動で軸が変化するときも慣性テンソルの対角化によってそれをあらわすことができる．

ニュートンによる運動方程式は回転運動をあらわすことは比較的困難であるため，並進運動をあらわすことが多い．また，運動を自転運動とその他の回転運動や並進運動に分解することができるならば，それらの運動方程式を連立することで運動を解析することが可能である．一般に，このようにあらわした運動方程式は厳密解を求めることはできないため，差分法等を用いる数値解析が必要である．

2.2　回転の仕事

回転の運動方程式による運動エネルギーのあらわす方法を考える．質量 m の物体が位置 $\boldsymbol{x}$ において速度 $\boldsymbol{v}$ で運動をするとき，その運動エネルギー $T(\boldsymbol{x})$ は

$$T(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2$$

である．これを角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を用いてあらわすことを考えたとき，回転軸からの変位 $\boldsymbol{x}_r$ を与えたとき $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}_r$ であるため

$$T(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}_r) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{x}_r\times\boldsymbol{v})$$

となり，$m(\boldsymbol{x}_r \times \boldsymbol{v})$ は慣性テンソルの導出より慣性テンソル I を与えれば $I\boldsymbol{\omega}$ となるため，

$$T(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I\boldsymbol{\omega}$$

が得られる．

また，仕事率についても同様にして，運動に対して $\boldsymbol{F}$ の力が作用するならば，仕事率 P は

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}_r) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F})$$

となり，$\boldsymbol{x}_r \times \boldsymbol{F}$ はトルクであるため，それを $\boldsymbol{\tau}$ とおくことにより

$$P = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

となる．

よって，以下の定義が与えられる．

定義 9.

慣性テンソル $I[kg \cdot m^2]$ の回転軸からの変位 $\boldsymbol{x}_r[m]$ において角速度 $\boldsymbol{\omega}[rad/s]$ で運動する物体の運動エネルギー $T(\boldsymbol{x})[J]$ は

$$T(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T I \boldsymbol{\omega}$$

となる．また，仕事率 $P[W]$ はトルク $\boldsymbol{\tau}[N \cdot m]$ を与えることで

$$P = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

とあらわされる．

2.3　角運動量保存則

角運動量保存則

慣性系に対して外力が作用しないとき，慣性系内に存在する角運動量 $\boldsymbol{L}$ について以下の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} =& \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{L} =& constant \end{aligned}$$

このように外力が無ければ角運動量が一定であることを**角運動量保存則**という．

質量 m の物体が運動するとき，微小時間に回転の中心からの変位 $\boldsymbol{x}$ の線分の軌跡の面積 S は速度 $\boldsymbol{v}$ を用いることで以下のようになる．

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v}|$$

この両辺に対して $2m$ をかけて角運動量保存則を用いる．

$$|\boldsymbol{x} \times (m\boldsymbol{v})| = |\boldsymbol{L}| = 2Sm = constant$$

このとき，質量を定数として扱えば運動に対する面積速度は一定であり，ケプラーの第 2 法則を満たしている．

2.4　回転座標系における慣性力

単純な等速円運動で等速円運動と連動する回転座標系を用いれば遠心力という慣性力が作用すると考えることができる．これと同様にして，一般の回転座標系における慣性力について考える．

座標系の変化しない静止直交座標系 S に対してそれを原点で回転させることで得られる回転座標系 S_R を与える．S_R は回転軸を示す角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を軸に自転するとし，これを示す基底変換を位相角 θ に対して $R(\theta)$ とあらわすとしたとき，S での変位 $\boldsymbol{x}$ と S_R での変位 $\boldsymbol{x}_R$ について $\boldsymbol{x}_R = R(\theta)\boldsymbol{x}$ が成り立つ．よって，それぞれの系における速度を $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_R$

とすれば，$\boldsymbol{v}$ は以下のようにあらわすことができる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} =&\frac{\mathrm{d}(R^T(\theta)\boldsymbol{x}_R)}{\mathrm{d}t}\\ =&\frac{\mathrm{d}R^T(\theta)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_R + R^T(\theta)\boldsymbol{v}_R\end{aligned}$$

これに対して無限小回転の定理を代入する．なお，S_R 上での $\boldsymbol{\omega}$ を $\boldsymbol{\omega}_R = R(\theta)\boldsymbol{\omega}$ とあらわすとする．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} =&R^T(\theta)\boldsymbol{v}_R + R^T(\theta)(\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{x}_R)\\ =&R^T(\theta)(\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{x}_R)\end{aligned}$$

これは，S_R 上で算出した速度を S 上の座標系に変換していることを示している．同様にして S 上での加速度を算出する．なお，S_R 上の角加速度を $\boldsymbol{\alpha}_R$ とあらわすとする．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} =&\frac{\mathrm{d}R^T(\theta)}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{x}_R) + R^T(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\alpha}_R \times \boldsymbol{x}_R + \boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{v}_R\right)\\ =&R^T(\theta)(\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\omega}_R \times (\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{x}_R)) + R^T(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\alpha}_R \times \boldsymbol{x}_R + \boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{v}_R\right)\\ =&R^T(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega}_R \times (\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{x}_R) + 2\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\alpha}_R \times \boldsymbol{x}_R\right)\end{aligned}$$

これは，$\boldsymbol{v}$ と同様にして S_R 上で求めた加速度を S 上の座標系に変換していることを示している．

よって，質量 m の物体が S 上で運動するとき，S_R 上でニュートンの運動方程式をあらわすと以下のようになる．なお，S 上で作用する力を $\boldsymbol{F}$ とし，これを S_R であらわあしたものを $\boldsymbol{F}_R = R(\theta)\boldsymbol{F}$ とする．

$$\begin{aligned}m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} =&\boldsymbol{F}\\ mR^T(\theta)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t} =&R^T(\theta)\boldsymbol{F}_R - mR^T(\theta)(\boldsymbol{\omega}_R \times (\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{x}_R) + 2\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{\alpha}_R \times \boldsymbol{x}_R)\\ m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_R}{\mathrm{d}t} =&\boldsymbol{F}_R - m\boldsymbol{\omega}_R \times (\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{x}_R) - 2m\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{v}_R - m\boldsymbol{\alpha}_R \times \boldsymbol{x}_R\end{aligned}$$

S_R は非慣性系であることから右辺の $\boldsymbol{F}_R$ 以外の項は慣性力であることがわかる．$m\boldsymbol{\omega}_R \times (\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{x}_R)$ のことを $\boldsymbol{\omega}$ について常に垂直に作用することから**遠心力**といい，$2m\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{v}_R$ は S_R 上で速度をもった運動に作用することから発見者であるガスパール＝ギュスターヴ・コリオリにちなんで**コリオリの力**といい，$m\boldsymbol{\alpha}_R \times \boldsymbol{x}_R$ は角加速度によって生じるもので**オイラー力**といわれている．

ここで，地球上での運動について考える．地球の自転周期を 1 日とすれば，角速度は $|\boldsymbol{\omega}_R| = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60} \fallingdotseq 7.2722 \times 10^{-5}\, rad/m$ であり，角加速度は $\boldsymbol{\alpha}_R = \boldsymbol{0}$ と考えることができるとする．また，運動する位置を地球上の表面と考え，地球は球と近似すればその半径は $6.3781 \times 10^6\, m$ とする．この条件下で地球上で作用する慣性力の大きさを計算する．なお，$\boldsymbol{x}_R$ と $\boldsymbol{\omega}_R$ で形成される $[0, \pi]$ な角を Θ とし，$\boldsymbol{v}_R$ と $\boldsymbol{\omega}_R$ で形成される $[0, \pi]$ な角を Φ とする．

$$\begin{aligned}|m\boldsymbol{\omega}_R \times (\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{x}_R) + 2m\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{v}_R| \le&m|\boldsymbol{\omega}_R \times (\boldsymbol{\omega}_R \times \boldsymbol{x}_R)| + 2m|\boldsymbol{\omega}_R||\boldsymbol{v}_R| \sin\Phi\\ =&m|\boldsymbol{\omega}_R|^2|\boldsymbol{x}_R| \sin\Theta + 2m|\boldsymbol{\omega}_R||\boldsymbol{v}_R| \sin\Phi\\ \fallingdotseq&3.3731 \times 10^{-2} m \sin\Theta + 1.4544 \times 10^{-4} m|\boldsymbol{v}_R| \sin\Phi\end{aligned}$$

このように遠心力に関する項とコリオリの力に関する項とであらわされる．また，地球上では重力は遠心力と万有引力による力の和として扱われる．そのため地球上で重力加速度を観測するときは地域によって差が生じるが，その最大は $3.3731 \times 10^{-2}\, m/s^2$ であるため，十分に無視することができる．コリオリの力による加速度は最大 $1.4544 \times 10^{-4}|\boldsymbol{v}_R|, m/s^2$ だけ生じることから十分に速い運動をしない限り無視することができる．しかし，十分に大きい時間を運動するときは，運動する時間に応じて誤差が蓄積されるため，コリオリの力を考慮する必要がある．

このように地球上では物体が早い運動をを長い時間行わない限り地球上で作用する慣性力は十分に小さいため，地球上での運動は慣性系に近似して考えることができる．