

古典力学 -剛体の運動-

いろはの学習備忘録

<http://168iroha.net>

初回更新 2018 年 8 月 17 日

最終更新 2019 年 1 月 1 日

目次

第 1 章	剛体の運動	1
1.1	剛体の定義	1
1.2	運動方程式	2
1.3	運動の拘束	7
1.4	平行軸の定理	13

第 1 章

剛体の運動

1.1 剛体の定義

定義 1.

物体を質点の集合と考え、力の作用する元で変形をしない理想的な物体を剛体という。これは質点とは異なり大きさと形状をもつ。また、これは質点の集合が相対位置が変化しない系であると定義することもできる。

剛体の定義より、剛体を連続系と考えれば質点は剛体を離散化した離散系であると考えられる。つまり、静止直交座標系における静止状態の剛体を変位 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ に対して $\tilde{H}(\mathbf{x}) = \tilde{H}(x, y, z)$ という形状を示す述語を与えたとき、これをサンプリングしたものが質点であり、サンプリング周期 T で添字 $(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3$ に対して $\tilde{H}[i, j, k] = \tilde{H}(x - iT, y - jT, z - kT)$ とあらわすとしたとき

$$\lim_{T \rightarrow 0} \sum_{(i, j, k) \in \mathbb{Z}^3} \tilde{H}[i, j, k] \delta(x - iT) \delta(y - jT) \delta(z - kT) = \tilde{H}(\mathbf{x})$$

が成り立つ。なお、 $\delta(x)$ はデルタ関数である。このように定義することで、剛体の運動は質点の運動と同一視することができる。また、 $\tilde{H}(\mathbf{x})$ と同様にして質量密度分布を $\tilde{M}(\mathbf{x})$ を定義すれば、それを離散化したものは $\tilde{M}[i, j, k] = \tilde{M}(x - iT, y - jT, z - kT)$ とすることができ、これは質点の質量に相当する。

ここで、この剛体を 1 点で支えて重力のように物体全体に等しく作用する力のみが作用するときについて考える。このとき、剛体は平衡でないときはトルクが生じるため、どの点において平衡になるかを考える。質点の場合を考えれば、座標に対する質量における加重平均の点が釣り合いの点となるため、これを式で表すと加重平均点 $\tilde{\mathbf{x}}_g$ は $\tilde{H}[i, j, k]$ が真である位置ベクトルの集合を $\Lambda[i, j, k]$ とすることで

$$\tilde{\mathbf{x}}_g = \frac{\sum_{\forall \lambda \in \Lambda[i, j, k]} \tilde{M}[i, j, k] \lambda}{\sum_{\forall \lambda \in \Lambda[i, j, k]} \tilde{M}[i, j, k]}$$

とあらわされる。これと同様にして $\tilde{H}(\mathbf{x})$ が真である \mathbf{x} の領域を V とすれば、この領域での総和となるため

$$\tilde{\mathbf{x}}_g = \frac{\int_V \tilde{M}(\mathbf{x}) \mathbf{x} dV}{\int_V \tilde{M}(\mathbf{x}) dV}$$

とあらわされ、 $\tilde{\mathbf{x}}_g$ を重心という。これは剛体全体に一樣に力が作用するときの作用点として扱うことができ、重力のように一樣に力が作用すると考えることができる物体の運動において、運動の中心と考えることができる。

これより、剛体の運動は重心の運動であると考えることができ、運動中の剛体 $H(\mathbf{x})$ の重心座標を \mathbf{x}_g 、自転運動を示す \mathbf{x}_g を通る回転軸からの回転角 θ を用いた回転行列 $R(\theta)$ とあらわせば、 $\tilde{H}(\mathbf{x})$ を基準にすることで

$$\tilde{H} \longrightarrow H$$

$$\mathbf{x} \longmapsto R(\theta)(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}_g) + \mathbf{x}_g$$

となるから $H \rightarrow \tilde{H}$ では

$$H \longrightarrow \tilde{H}$$

$$\mathbf{x} \longrightarrow R^T(\theta)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_g) + \tilde{\mathbf{x}}_g$$

のようになり、 $H(\mathbf{x})$ は

$$H(\mathbf{x}) = \tilde{H}(R^T(\theta)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_g) + \tilde{\mathbf{x}}_g)$$

のとあらわすことができる。

また、剛体に作用する力について以下の定理が成り立つ。

作用線の定理

剛体に作用する力について、その力の作用線上を移動させても効果は変わらない。これを作用線の定理という。

Proof.

この命題は剛体はそれを構成するそれぞれの質点の相対位置が不変であるため、トルクが変化しないことを示せば十分である。このとき、作用線上の移動では力の向きは変わらないためトルクの向きは一定であり、トルクの大きさが一定であることを示せばいい。また、力は一定であるため、回転の中心から力の作用点までの変位 \mathbf{x}_r および \mathbf{x}_r と力の成す角 θ について外積の大きさの関係式より

$$|\mathbf{x}_r| \sin \theta = \text{constant}$$

であることを示せばいいが、 $|\mathbf{x}_r| \sin \theta$ は回転の中心から力の作用線までの距離を示すため一定である。つまり、トルクは変化しない。

よって、命題は証明された。

□

1.2 運動方程式

剛体はそれぞれの質点の連続体濃度の集合であることから剛体で質点同士の内力が作用する。しかし、それは作用反作用の法則より 0 となるため無視することができる。

質量 M 剛体の定義される領域を V としたとき、この領域で定義される運動量密度分布 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ を与える。このとき、質量密度分布 $m(\mathbf{x})$ および剛体の重心座標 \mathbf{x}_g を与えれば $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ の V における総和 \mathbf{P} は、重心座標の定義を用いることにより

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int_V \mathbf{p}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \\ &= \int_V m(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt} dV(\mathbf{x}) \\ &= \frac{d}{dt} \int_V m(\mathbf{x}) \mathbf{x} dV(\mathbf{x}) \\ &= \frac{d}{dt} (M \mathbf{x}_g) \end{aligned}$$

となり、剛体を構成する各質点に作用する力の分布 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ についての全てのニュートンの運動方程式の総和をとれば、

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{F}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) &= \int_V \frac{d\mathbf{p}(\mathbf{x})}{dt} dV(\mathbf{x}) \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{p}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \\ &= \frac{d^2}{dt^2} (M \mathbf{x}_g) \end{aligned}$$

となる。これは剛体の重心座標に対するニュートンの運動方程式となっている。

よって、以下の定義が与えられる。

定義 2.

質量が $M[kg]$ で重心座標が $\mathbf{x}_g[m]$ の剛体が運動をするとき、剛体の重心座標のニュートンの運動方程式は剛体に与えられる外力の総和 $\mathbf{F}[N]$ によって

$$\mathbf{F} = M \frac{d^2 \mathbf{x}_g}{dt^2}$$

と与えられる。しかし、これは重心座標に対する運動方程式のため、質点における運動方程式と同様にして自転運動を示すことはできない。

また、剛体に平行な向きが異なり大きさが等しい力 2 つの力 $\mathbf{f}, -\mathbf{f}$ が作用するとき、剛体の重心に関する運動方程式の力は剛体に作用する力の総和であらわされるため

$$M \frac{d^2 \mathbf{x}_g}{dt^2} = \mathbf{0}$$

となり、重心自体は運動をしない。しかし、トルク $\boldsymbol{\tau}$ を考えれば重心から \mathbf{f} までの変位 \mathbf{x}_{r_1} と $-\mathbf{f}$ までの変位 \mathbf{x}_{r_2} を与えることで

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}_{r_1} \times \mathbf{f} + \mathbf{x}_{r_2} \times (-\mathbf{f}) = (\mathbf{x}_{r_1} - \mathbf{x}_{r_2}) \times \mathbf{f}$$

となり、このトルクの大きさは \mathbf{f} と $-\mathbf{f}$ の作用線同士の距離を l とすることで

$$|\boldsymbol{\tau}| = l|\mathbf{f}|$$

となり、回転運動のみが生じる。このような力の組 $(\mathbf{f}, -\mathbf{f})$ を偶力という。

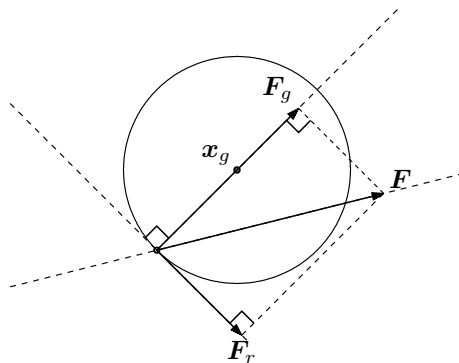
ここで、剛体に作用する力について以下の定理を与える。

剛体に作用する力の分解

剛体に作用する任意の力は、重心を中心として並進運動をさせる成分と偶力に分解可能である。

Proof.

この命題は、重力を中心としたトルクが $\mathbf{0}$ となる力と合力は $\mathbf{0}$ であるがトルクをもつということであり、任意のベクトルは分解が可能であることから、簡単にするために質量密度が一様に分布する剛体円を例にとれば、



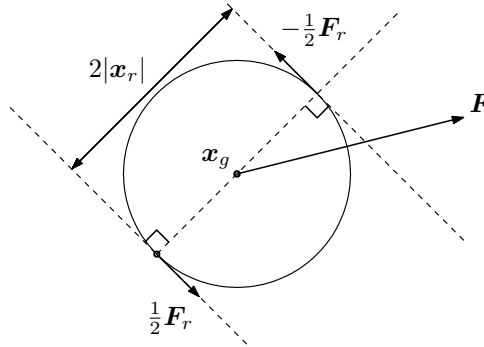
図のようにベクトルの分解が可能である。なお、このとき \mathbf{x}_g は剛体の重心座標であり、 \mathbf{F} は剛体に作用する任意の力であり、この図は \mathbf{F} について

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_r$$

と分解したものである。このとき、この剛体に作用するトルク $\boldsymbol{\tau}$ は \mathbf{x}_g から力の作用点までの変位 \mathbf{x}_r を与えることで

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{x}_r \times \mathbf{F} = \mathbf{x}_r \times \mathbf{F}_r, \quad |\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{x}_r||\mathbf{F}_r|$$

となる。また、重心における運動方程式を考えれば、全ての力の総和によってあらわされることから



図のように分解され、偶力 $(\frac{1}{2}F_r, -\frac{1}{2}F_r)$ と F に分解できることが示される。
 よって、命題は証明された。

□

剛体の重心座標におけるニュートンの運動方程式とこの定理により、重心を通る回転軸による自転運動を考えることで剛体の全ての運動を示すことができる。以後ニュートンの運動方程式の定義される座標系 S は完全正規直交系であるとして自転運動の運動方程式を導出する。

重心を通る回転軸方向の角速度を ω としたとき、慣性テンソル I は重心から観測した位置を $x_r = x - x_g = (x_r, y_r, z_r)$ とすることで、重心位置からの慣性テンソルの総和をとるため

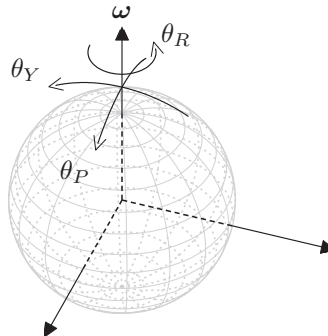
$$I = \int_V m(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} y_r^2 + z_r^2 & -y_r x_r & -z_r x_r \\ -x_r y_r & x_r^2 + z_r^2 & -z_r y_r \\ -x_r z_r & -y_r z_r & x_r^2 + y_r^2 \end{pmatrix} dV$$

とあらわされる。また、トルク τ に関しては力と同様にして総和をとることで回転運動の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = \tau = \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{F}(\mathbf{x})) dV$$

となる。また、剛体の運動は剛体の重心座標の運動と重心座標を通る回転軸による自転運動に分解できるが、自転運動によって回転軸自体が回転するということを考えなければならない。実際、上の回転運動の運動方程式は回転軸の回転を考慮されていないため、回転軸の傾きが固定されたものである。

そこで、 ω は回転軸方向を示すことから、初期状態における ω を基準にしてこれを傾けることを考える。このとき、



のよう球を剛体として考えれば、軸の回転角 θ_R とそれを2方向に傾けることを示す回転角 θ_P, θ_Y によって軸の傾きをあらわすことができ、それらの回転を示す回転行列 $R(\theta_R), R(\theta_P), R(\theta_Y)$ を与えることにより、回転軸の傾きをあらわすことができる。また、剛体の自転運動と連動する ω を座標軸の1つとするような回転座標系 S_R としたとき、 S_R 上での重心から観測した変位 x_{S_r} は、 S が完全正規直交系であることから $x_{S_r} = (R(\theta_Y)R(\theta_P)R(\theta_R))^T x_r$ とあらわされる。このような回転行列の取り方は任意であり、 $\theta_R, \theta_P, \theta_Y$ のような取り方による回転をローリングといい、 θ_R により回転をロール、 θ_P による回転をピッチ、 θ_Y による回転をヨーという。

便宜的に $R(\theta) = R(\theta_Y)R(\theta_P)R(\theta_R)$ とあらわすとすれば、 S_R における慣性テンソル I_R は

$$I_R = R^T(\theta)IR(\theta)$$

となり、 S_R 上では剛体は相対位置を変えないように観測されるため I_R は定数量となる。よって、回転軸の回転運動を考慮した自転運動の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(R(\boldsymbol{\theta})I_R R^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\tau}$$

のようにあらわされる。

このように、3つの角度を用いて剛体の回転軸の回転、すなわち剛体の姿勢をあらわすとき、このような3つの角度をオイラー角といい、剛体の姿勢をあらわす方法の1つである。よって、剛体の運動は重心位置を示す変数3つと角度を示す変数3つで表現することができる。このような運動についての変数の個数を自由度といい、剛体の運動の自由度は6である。

オイラー角の例として、 $R(\boldsymbol{\theta}) = R(\theta_z)R(\theta_y)R(\theta_x)$ として

$$R(\boldsymbol{\theta}) = R(\theta_z)R(\theta_y)R(\theta_x) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix}$$

のように3つの種類の回転行列の積によって回転軸の状態をあらわすことができる。オイラー角は3つの角度によって回転軸の状態をあらわすが、どれか1つの角度が一定条件を満たすことによって自由度が3から2へと減少することがある。このような現象をジンバルロックといい、上の例では $\theta_y = \frac{\pi}{2}$ のときジンバルロックが発生する。

実際に計算をすると

$$\begin{aligned} R(\theta_z)R\left(\frac{\pi}{2}\right)R(\theta_x) &= \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta_z & \cos \theta_z \\ 0 & \cos \theta_z & \sin \theta_z \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta_x - \theta_z) & \sin(\theta_x - \theta_z) \\ 0 & \sin(\theta_x - \theta_z) & -\sin(\theta_x - \theta_z) \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、 θ_x と θ_z が同一回転軸による回転を示すこととなり、自由度が1だけ減少することが確かめられる。

よって、オイラー角による自転運動について以下の定義が与えられる。

定義 3.

完全正規直交系 S の領域 V で定義される剛体に対して、 S 上における変位 $\mathbf{x}[m]$ に対する質量密度分布 $m(\mathbf{x})[kg/m^3]$ が与えられたとする。オイラー角 $\boldsymbol{\theta}[rad]$ が与えられ、それによる剛体の自転を示す行列を $R(\boldsymbol{\theta})$ としたとき、この自転による回転と連動する回転座標系 S_R を定義する。 S_R 上で重心位置 $\mathbf{x}_g[m]$ から見た位置 $\mathbf{x}_r = \mathbf{x} - \mathbf{x}_g = (x_r, y_r, z_r)[m]$ を用いれば、慣性テンソル $I_R[kg \cdot m^2]$ は定数として定義できる。

$$I_R = \int_V m(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} y_r^2 + z_r^2 & -y_r x_r & -z_r x_r \\ -x_r y_r & x_r^2 + z_r^2 & -z_r y_r \\ -x_r z_r & -y_r z_r & x_r^2 + y_r^2 \end{pmatrix} dV$$

このとき、 S 上の V の各点で力 $\mathbf{F}(\mathbf{x})[N]$ が作用するとき、 \mathbf{x}_g を通る回転軸方向を示す角速度 $\boldsymbol{\omega}[rad/m]$ に対して回転運動の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(R(\boldsymbol{\theta})I_R R^T(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}) = \int_V (\mathbf{x} \times \mathbf{F}(\mathbf{x}))dV$$

となり、 $\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\omega}$ の関係式は $\boldsymbol{\omega}$ の外積行列 $\boldsymbol{\omega}^*$ を用いれば

$$\boldsymbol{\omega}^* = R^T(\boldsymbol{\theta}) \frac{dR(\boldsymbol{\theta})}{dt}$$

とあらわされる。これによりオイラー角と角速度の連立微分方程式が得られるが、ジンバルロックの発生により解が求めることができない場合が存在する。

また、オイラー角による回転運動の運動方程式を1階連立分解すると、 $\boldsymbol{\omega}$ の外積行列 $\boldsymbol{\omega}^*$ を用いることにより

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\theta})I_R R^T(\boldsymbol{\theta}) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= \boldsymbol{\tau} - \frac{d}{dt}(R(\boldsymbol{\theta})I_R R^T(\boldsymbol{\theta}))\boldsymbol{\omega} \\ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} &= R(\boldsymbol{\theta})I_R^{-1} R^T(\boldsymbol{\theta}) \left(\boldsymbol{\tau} - \left(\frac{dR(\boldsymbol{\theta})}{dt} I_R R^T(\boldsymbol{\theta}) + R(\boldsymbol{\theta})I_R \frac{dR^T(\boldsymbol{\theta})}{dt} \right) \boldsymbol{\omega} \right) \\ &= R(\boldsymbol{\theta})I_R^{-1} R^T(\boldsymbol{\theta}) \left(\boldsymbol{\tau} - R(\boldsymbol{\theta}) \left(R^T(\boldsymbol{\theta}) \frac{dR(\boldsymbol{\theta})}{dt} I_R + I_R \frac{dR^T(\boldsymbol{\theta})}{dt} R(\boldsymbol{\theta}) \right) R^T(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega} \right) \\ &= R(\boldsymbol{\theta})I_R^{-1} R^T(\boldsymbol{\theta}) (\boldsymbol{\tau} - R(\boldsymbol{\theta}) (\boldsymbol{\omega}^* I_R - I_R \boldsymbol{\omega}^*) R^T(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega}) \\ &= R(\boldsymbol{\theta})I_R^{-1} R^T(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\tau} - R(\boldsymbol{\theta}) (I_R^{-1} \boldsymbol{\omega}^* I_R - \boldsymbol{\omega}^*) R^T(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

とあらわすことができる。なお、オイラー角と角速度の微分方程式は一般的に導出することは不可能である。このようにすることで準線型常微分方程式となるため、オイラー角と角速度の関係式を導出できれば数値解析を用いて近似解を求めることが可能である。

より自由な剛体の運動を考えるにはジンバルロックの回避方法を考えなければならない。ここで、角速度の定義を考えると、重心を通る回転軸方向の単位ベクトル \mathbf{n} と回転角 θ に対して $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{n}$ である。オイラー角による回転運動の運動方程式では、 \mathbf{n} はオイラー角によって従属変数になっていたことから、 \mathbf{n} を独立変数として扱うことで回転運動を単純化することを考える。

回転軸 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ の周りを回転角 θ だけ回転することを示す回転行列を $R(\theta, \mathbf{n})$ はロドリゲスの回転公式より

$$R(\theta, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \cos \theta + n_x^2(1 - \cos \theta) & n_x n_y(1 - \cos \theta) - n_z \sin \theta & n_x n_z(1 - \cos \theta) + n_y \sin \theta \\ n_y n_x(1 - \cos \theta) + n_z \sin \theta & \cos \theta + n_y^2(1 - \cos \theta) & n_y n_z(1 - \cos \theta) - n_x \sin \theta \\ n_z n_x(1 - \cos \theta) - n_y \sin \theta & n_z n_y(1 - \cos \theta) + n_x \sin \theta & \cos \theta + n_z^2(1 - \cos \theta) \end{pmatrix}$$

とあらわされる。これにより、回転運動の運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(R(\theta, \mathbf{n})I_R R^T(\theta, \mathbf{n}))\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}$$

とあらわされる。

この微分方程式を1階連立分解をすることを考えれば、角速度についての微分方程式はオイラー角と同様にして考えることができ、

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = R(\theta, \mathbf{n})I_R^{-1} R^T(\theta, \mathbf{n})\boldsymbol{\tau} - R(\theta, \mathbf{n}) (I_R^{-1} \boldsymbol{\omega}^* I_R - \boldsymbol{\omega}^*) R^T(\theta, \mathbf{n})\boldsymbol{\omega}$$

のようになる。また、角度と軸についての微分方程式は角速度の定義より

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}, \quad \frac{d\theta}{dt} = |\boldsymbol{\omega}| = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$$

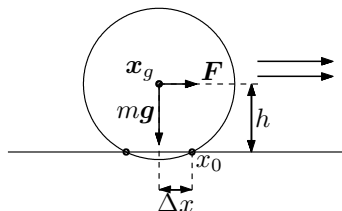
となり、オイラー角による回転運動の運動方程式とは違い、1階連立分解の一般形を与えることができる。

これによって剛体の自転運動の数値解析が可能であるが、実際の数値解析上では四元数を用いることもある。このとき、 $q \in \mathbb{H}$ の共役を \bar{q} としたとき、 $q = (\cos \frac{\theta}{2}; \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2})$ および $v \in \mathbb{H}$ で $v = (0; \mathbf{x})$ と定義すれば

$$\text{Im}(qv\bar{q}) = R(\theta, \mathbf{n})\mathbf{x}$$

とあらわすことができる。

また、一般に物体は弾性をもつことから物体が転がる時、簡単にするために質量密度が一様に分布する質量 m の弾性円を例にとることで



図のように物体が変形をする。なお、 \mathbf{x}_g は重心で \mathbf{g} は重力加速度である。このとき、明らかに弾性による抗力が作用するため \mathbf{F} を加えなければ弾性円は運動をしない。

ここで、この弾性円が \mathbf{F} を加えたことにより等速直線運動をすると仮定する。 x_0 の点で床と弾性円の抗力が与えられるすれば、 x_0 を作用点としたトルクは釣り合うため

$$m|\mathbf{g}|\Delta x - h|\mathbf{F}| = 0$$

となり

$$|\mathbf{F}| = \frac{\Delta x}{h} m|\mathbf{g}|$$

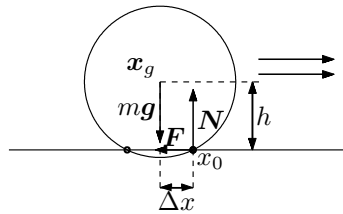
といった関係式が得られる。

これは物体が転がるときに x_0 で \mathbf{F} の釣り合いに相当する \mathbf{F} とは逆向きの力 $-\mathbf{F}$ が作用することを示しており、その大きさは荷重 $m\mathbf{g}$ に比例し、それを転がり抵抗もしくは転がり摩擦という。また、荷重の係数は無次元量であることからそれを

$$C_{rr} = \frac{\Delta x}{h}$$

といった物体の材料や形状に依存した定数で与えることができ、これを転がり抵抗係数もしくは転がり摩擦係数という。これは真に剛体であれば変形をしないため $\Delta x = 0$ となり、転がり抵抗は生じない。

また、実際に物体が転がる時には以下のような図の力関係が成り立つ。



なお、 N は垂直抗力である。

1.3 運動の拘束

実際の物体が運動するときは、地面を滑ったり転がったり、振り子のようにどこかで固定されたりと運動が拘束されている場合がほとんどである。このような位置に対する拘束を位置拘束といい、速度に対する拘束を速度拘束という。簡単な場合であれば拘束を考えなくても運動方程式を構築可能であるが、複雑な運動になればなるほど具体的な張力や抗力を与えることは困難である。そのような場合における運動について考える。

完全正規直交系 S で拘束のされない自由な運動をする剛体について、重心位置が \mathbf{x}_g で質量 M の剛体に力 \mathbf{F} とトルク $\boldsymbol{\tau}$ が作用するとする。また、 \mathbf{x}_g を通る回転軸を示す単位ベクトル \mathbf{n} とその回転角 θ を変数とする剛体の自転運動を示す回転行列 $R(\theta, \mathbf{n})$ を与えたとき、 $R(\theta, \mathbf{n})$ により基底変換される回転座標系で定義される慣性テンソル I_R を定義したとする。 \mathbf{x}_g の速度を \mathbf{v}_g とすることで、運動方程式は形式的に

$$\frac{d}{dt} \left(\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & R(\theta, \mathbf{n}) I_R R^T(\theta, \mathbf{n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_g \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\mu \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Phi}$$

とあらわすことができる。

また、運動を拘束する拘束力を示す項 $\boldsymbol{\Phi}_c = (\mathbf{F}_c, \boldsymbol{\tau}_c)$ を与えることで、力およびトルクは重ね合わせが可能であるため運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mu \boldsymbol{\Omega}) &= \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}_c \\ \mu \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} &= \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}_c - \frac{d\mu}{dt} \boldsymbol{\Omega} \\ \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} &= \mu^{-1} \left(\boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{\Phi}_c - \frac{d\mu}{dt} \boldsymbol{\Omega} \right) \end{aligned}$$

とあらわされると考えられる。

ここで、拘束の定義を与えるために以下の定理を与える。

剛体における仮想仕事の原理

剛体が平行状態、すなわち剛体に作用する力に総和 $\mathbf{F}[N]$ とトルクの総和 $\boldsymbol{\tau}[N \cdot m]$ について $\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ となるような状態であるとする。このとき、この剛体に対して微小変位 $\delta \mathbf{x}[m]$ をしたとき \mathbf{F} のする仕事は 0 である。これを仮想仕事の原理といい、 $\delta \mathbf{x}$ を仮想変位という。

また、これは逆も成り立つ。

Proof.

剛体のある 1 点に対して仮想変位を与えることを考えると、剛体の運動は重心の運動と重心を通る回転軸による自転運動に分解できるため、回転軸を示す単位ベクトル \mathbf{n} による仮想回転角 $\delta \theta$ と重心の仮想変位 $\delta \mathbf{x}_g$ および重心からの位置 \mathbf{x}_r を与えることで、全体の仮想変位は

$$\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{x}_g + \mathbf{n} \delta \theta \times \mathbf{x}_r$$

とあらわされる。剛体の領域を V として剛体を構成する各質点に作用する変位 \mathbf{x} に対する力の分布 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ を与えれば

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x})$$

であり、同様にしてトルクは

$$\boldsymbol{\tau} = \int_V \mathbf{x}_r \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x})$$

となる。これに対して $\delta \mathbf{x}$ を作用させることにより、仕事は

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{x} dV(\mathbf{x}) &= \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{x}_g dV(\mathbf{x}) + \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{n} \delta \theta \times \mathbf{x}_r) dV(\mathbf{x}) \\ &= \delta \mathbf{x}_g \cdot \int_V \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) + \int_V \delta \theta \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_r \times \mathbf{f}(\mathbf{x})) dV(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x}_g + \mathbf{n} \delta \theta \cdot \int_V \mathbf{x}_r \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{x}_g + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \delta \theta \end{aligned}$$

となる。

ここで、平衡状態を仮定すれば $\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ より明らかに仕事は 0 となるため、逆が成り立つことを示す。このとき、 $\delta \mathbf{x}_g$ と $\mathbf{n} \delta \theta$ は任意であるため、常に仕事は 0 となるためには $\mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ とならなければならない。

よって、命題は証明された。

□

この原理は物体が系において相対位置を変化しないときに作用する力の釣り合いについてを示している。物体が時間的変化をする場合においても非慣性系を慣性系として扱うときと同様の操作をすることで以下の定理が導かれる。

ダランベールの原理

S 系で運動をする物体に対して、物体が平衡状態となるように観測される S' 系があるとする。このとき、 S' 系で仮想仕事の原理を適用することにより任意の運動をする物体に対して仮想仕事の原理を適用することができる。これをダランベールの原理という。

これらの定理は剛体についてを示しているが、剛体を離散化したものが質点であるため、質点系でも同様にして成り立つ。実際、物体が平衡状態となるように観測される S' 系があるとするれば、一般に S' 系では慣性力を考慮する必要があるため、慣性力により運動方程式に対して補正することであたかも釣り合っているかのように扱うことができるということである。

ここで、拘束力の定義について考える。運動を拘束するということは何かしらの拘束条件によって運動の軌道が制限

されることであり、その拘束による系の中ではエネルギーが保存されるべきである。実際、拘束により運動をする系に対してエネルギーを与えたり奪ったりするのは考えるべきではない。なぜならば、エネルギーの授受というのはエネルギーの変化する系、すなわち運動をしている系に含まれ、拘束による系単体として考えることができないからである。

そこで、以下の定義を与える。

定義 4.

物体に作用する運動を拘束する力 $\mathbf{F}_c[F]$ とトルク $\boldsymbol{\tau}_c[N \cdot m]$ をそれぞれ拘束力および拘束トルクという。剛体において、重心位置の速度 $\mathbf{v}_g[m/s]$ および自転運動の角速度 $\boldsymbol{\omega}[rad/s]$ を与えれば

$$\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}_g + \boldsymbol{\tau}_c \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

を満たす。これは運動方向に対して拘束は仕事をしないということを示す。

ただし、これを満たさないような拘束、例えば振子の支点が運動するような場合も考えることができるが、拘束に対してダランベールの原理を適用することにより静止系の拘束と同一視して考えることができる。

一般に拘束条件として与えられるのは、任意の位置 \mathbf{x}_p および任意の位置の速度 \mathbf{v}_p を与えることにより

$$\begin{cases} C(\mathbf{x}_p, \theta, \mathbf{n}, \mathbf{v}_p, \boldsymbol{\omega}, t) = 0 \\ \mathbf{C}(\mathbf{x}_p, \theta, \mathbf{n}, \mathbf{v}_p, \boldsymbol{\omega}, t) = \mathbf{0} \end{cases}$$

のようにスカラーかベクトルのどちらかである。しかし、これを考えるのは困難であるため、位置拘束と速度拘束の2つの場合のみを考える。まず、スカラーによる1つの位置拘束 $C(\mathbf{x}_p, \theta, \mathbf{n}) = 0$ を考えたとき

$$C(\mathbf{x}_p, \theta, \mathbf{n}, t) = C_x(\mathbf{x}_p, t) + C_\theta(\theta, \mathbf{n}, t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C_x(\mathbf{x}_p, t) = 0 \\ C_\theta(\theta, \mathbf{n}, t) = 0 \end{cases}$$

と独立に扱うことができることを仮定する。実際、独立に扱うことができないときは運動不可となることを考える必要があるため、ここでは扱わない。

これらを時間微分した形式が速度拘束の一般形と考えることができるため、それぞれを時間微分をする。まずは、 $C_x(\mathbf{x}_p, t) = 0$ を時間微分すると

$$\frac{dC_x}{dt} = \frac{\partial C_x}{\partial \mathbf{x}_p} \cdot \mathbf{v}_p + \frac{\partial C_x}{\partial t} = \nabla C_x \cdot \mathbf{v}_p + \frac{\partial C_x}{\partial t} = 0$$

となる。同様にして、 $C_\theta(\theta, \mathbf{n}, t) = 0$ を時間微分すると

$$\frac{dC_\theta}{dt} = \frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial C_\theta}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{dt} + \frac{\partial C_\theta}{\partial t} = 0$$

となるが、 \mathbf{n} の時間微分を考えれば $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ とすることにより

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} \right) \\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2\omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + 2\omega_y \frac{d\omega_y}{dt} + 2\omega_z \frac{d\omega_z}{dt}}{|\boldsymbol{\omega}|^3} \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|^3} \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|^3} \left((\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \left(\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) \boldsymbol{\omega} \right) \\ &= \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}|^3} \left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{\omega} \right) \right) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となるため

$$\frac{dC_\theta}{dt} = \frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial C_\theta}{\partial t} = \frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial C_\theta}{\partial t} = 0$$

となる。実際、 \mathbf{n} は $\boldsymbol{\omega}$ によって与えることができるため速度拘束に含められると考えることができ、 $C_\theta(\theta, \mathbf{n}, t) = 0$ の時間微分について \mathbf{n} による微分項が存在しないため、真に \mathbf{n} が位置拘束条件に含める必要がないことがわかる。そのため、位置拘束条件には \mathbf{n} を含めないように

$$C(\mathbf{x}_p, \theta, t) \equiv C(\mathbf{x}_p, \theta, \mathbf{n}, t), \quad C_\theta(\theta, t) \equiv C_\theta(\theta, \mathbf{n}, t)$$

と定義する。よって、位置拘束の時間微分について

$$(\nabla C_x)^T \mathbf{v}_p + \frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial}{\partial t} (C_x + C_\theta) = 0$$

となるが、 \mathbf{v}_p は \mathbf{x}_g から \mathbf{x}_p までの変位 $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_g$ により

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_g + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_r = \mathbf{v}_g - \mathbf{x}_r \times \boldsymbol{\omega}$$

とあらわされることから、 \mathbf{x}_r の外積行列を \mathbf{x}_r^* とすることで

$$\begin{aligned} & (\nabla C_x)^T (\mathbf{v}_g - \mathbf{x}_r^* \boldsymbol{\omega}) + \frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial}{\partial t} (C_x + C_\theta) \\ &= (\nabla C_x)^T \mathbf{v}_g + \left(\frac{\partial C_\theta}{\partial \theta} \mathbf{n}^T - (\nabla C_x)^T \mathbf{x}_r^* \right) \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial}{\partial t} (C_x + C_\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって、スカラーによる速度拘束条件 $C(\mathbf{v}_g, \boldsymbol{\omega}, t) = 0$ は適当なベクトル $\mathbf{c}_v, \mathbf{c}_\omega$ とスカラー c_0 により

$$C(\mathbf{v}_g, \boldsymbol{\omega}, t) = \mathbf{c}_v^T \mathbf{v}_g + \mathbf{c}_\omega^T \boldsymbol{\omega} + c_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_v^T & \mathbf{c}_\omega^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_g \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} + c_0 = 0$$

とあらわすことができることがわかる。なお、 c_0 は拘束条件が時間変化しないときは存在しない。

次に、ベクトルによる1つの拘束条件 $\mathbf{C}(\mathbf{x}_p, \theta, t) = \mathbf{0}$ を与えたとき、スカラーによる拘束と同様にして

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}_p, \theta, t) = \mathbf{C}_x(\mathbf{x}_p, t) + \mathbf{C}_\theta(\theta, t) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{C}_x(\mathbf{x}_p, t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_\theta(\theta, t) = \mathbf{0} \end{cases}$$

と独立に扱うことができると仮定する。これらはベクトルの成分ごとに考えることでスカラーによる拘束と同様に考えることができるため、

$$\begin{cases} \mathbf{C}_x(\mathbf{x}_p, t) = (\mathbf{C}_{1,x}(\mathbf{x}_p, t), \mathbf{C}_{2,x}(\mathbf{x}_p, t), \mathbf{C}_{3,x}(\mathbf{x}_p, t)) \\ \mathbf{C}_\theta(\theta, t) = (\mathbf{C}_{1,\theta}(\theta, t), \mathbf{C}_{2,\theta}(\theta, t), \mathbf{C}_{3,\theta}(\theta, t)) \end{cases}$$

とあらわすことにより位置拘束の時間微分は

$$\begin{pmatrix} (\nabla C_{1,x})^T & \frac{\partial C_{1,\theta}}{\partial \theta} \mathbf{n}^T \\ (\nabla C_{2,x})^T & \frac{\partial C_{2,\theta}}{\partial \theta} \mathbf{n}^T \\ (\nabla C_{3,x})^T & \frac{\partial C_{3,\theta}}{\partial \theta} \mathbf{n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_g \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} (C_x + C_\theta) = \mathbf{0}$$

となり、 \mathbf{v}_p は \mathbf{v}_g を用いれば

$$\begin{pmatrix} (\nabla C_{1,x})^T & \frac{\partial C_{1,\theta}}{\partial \theta} \mathbf{n}^T - (\nabla C_{1,x})^T \mathbf{x}_r^* \\ (\nabla C_{2,x})^T & \frac{\partial C_{2,\theta}}{\partial \theta} \mathbf{n}^T - (\nabla C_{2,x})^T \mathbf{x}_r^* \\ (\nabla C_{3,x})^T & \frac{\partial C_{3,\theta}}{\partial \theta} \mathbf{n}^T - (\nabla C_{3,x})^T \mathbf{x}_r^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_g \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial t} (C_x + C_\theta) = \mathbf{0}$$

となる。よって、ベクトルによる速度拘束条件 $\mathbf{C}(\mathbf{v}_g, \boldsymbol{\omega}, t) = \mathbf{0}$ は適当な 3×3 行列 C_v, C_ω とベクトル \mathbf{C}_0 により

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}_g, \boldsymbol{\omega}, t) = C_v \mathbf{v}_g + C_\omega \boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} C_v & C_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_g \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} + \mathbf{C}_0 = \mathbf{0}$$

とあらわすことができることがわかる。なお、 \mathbf{C}_0 は拘束条件が時間変化しないときは存在しない。
これらのことを以下にまとめる。

位置拘束条件に対する速度拘束条件

剛体の運動について任意の位置 \mathbf{x}_p 、重心位置の速度 \mathbf{v}_g 、回転軸を示す単位ベクトル \mathbf{n} 、回転角 θ 、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を与えたとする。スカラーによる位置拘束条件 $C(\mathbf{x}_p, \theta, t) = 0$ を与え、変位と角度がそれぞれ独立に扱えることを仮定する。この形式に対するスカラーによる速度拘束条件 $C(\mathbf{v}_g, \boldsymbol{\omega}, t) = 0$ は適当なベクトル $\mathbf{c}_v, \mathbf{c}_\omega$ とスカラー c_0 により

$$C(\mathbf{v}_g, \boldsymbol{\omega}, t) = \mathbf{c}_v^T \mathbf{v}_g + \mathbf{c}_\omega^T \boldsymbol{\omega} + c_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_v^T & \mathbf{c}_\omega^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_g \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} + c_0 = 0$$

とあらわされる。なお、 c_0 は拘束条件が時間変化しないときは存在しない。

同様の仮定下でベクトルによる位置拘束条件 $\mathbf{C}(\mathbf{x}_p, \theta, t) = \mathbf{0}$ を与えれば、この形式に対するベクトルによる速度拘束条件 $\mathbf{C}(\mathbf{v}_g, \boldsymbol{\omega}, t) = \mathbf{0}$ は適当な 3×3 行列 C_v, C_ω とベクトル \mathbf{C}_0 により

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}_g, \boldsymbol{\omega}, t) = C_v \mathbf{v}_g + C_\omega \boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix} C_v & C_\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_g \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix} + \mathbf{C}_0 = \mathbf{0}$$

とあらわされる。なお、 \mathbf{C}_0 は拘束条件が時間変化しないときは存在しない。

次に、位置拘束条件により拘束力および拘束トルクについて考える。一般に拘束はある1点における位置および速度を拘束するものであると考えることができるため、重心から拘束点までの変位 $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_g$ により

$$\boldsymbol{\tau}_c = \mathbf{x}_r \times \mathbf{F}_c$$

といった関係式を与えることができる。

まず、 $C_x(\mathbf{x}_p, t) = 0$ について考えると $C_x(\mathbf{x}_p, t) = 0$ は曲面を形成しており、その曲面上を \mathbf{x}_p はとることがわかる。このとき、この曲面を拘束面といい、 \mathbf{x}_p を拘束面に拘束することから作用反作用の法則により拘束面に対して垂直に拘束力が作用することがわかる。このとき、 $C_x(\mathbf{x}_p, t) = 0$ による拘束力 $\mathbf{F}_{x,c}$ について

$$\mathbf{F}_{x,c} \propto \nabla C_x$$

が成り立つことがわかる。すなわち、乗数 λ_x により

$$\mathbf{F}_{x,c} = \lambda_x \nabla C_x$$

とあらわすことができる。実際にこの条件下で拘束条件が時間依存しないとき拘束系で運動エネルギーが保存されることを確かめる。

そのために拘束力と拘束トルク定義の書き換えを与える。

拘束力と拘束トルクの条件式の別表現

剛体の静止系における拘束力および拘束トルクについての条件式は、任意の \mathbf{x}_p に拘束力 \mathbf{F}_c が作用するとし、 \mathbf{x}_p の速度を \mathbf{v}_p とすれば条件式は

$$\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}_p = 0$$

と与えられる。

Proof.

剛体の重心座標を \mathbf{x}_g とすれば重心位置から \mathbf{x}_p までの変位 \mathbf{x}_r は $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_g$ とあらわされ、拘束トルクは $\boldsymbol{\tau}_c = \mathbf{x}_r \times \mathbf{F}_c$ とあらわされる。このとき、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を与えれば

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}_g + \boldsymbol{\tau}_c \cdot \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}_g + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{x}_r \times \mathbf{F}_c) \\ &= \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}_g + \mathbf{F}_{x,c} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_r) \\ &= \mathbf{F}_c \cdot (\mathbf{v}_g + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_r) \\ &= \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}_p \end{aligned}$$

となる。

よって、命題は証明された。

□

この定理により、 $C_x(\mathbf{x}_p, t) = 0$ が時間依存しないとすれば、 \mathbf{v}_p は $C_x(\mathbf{x}_p, t) = 0$ の接線方向であり、 $\mathbf{F}_{x,c} \perp \mathbf{v}_p$ となるため

$$\mathbf{F}_{x,c} \cdot \mathbf{v}_p = 0$$

となり、拘束は仕事をしないことが確かめられる。

また、 $C_\theta(\theta, t) = 0$ について、特に拘束条件が時間変化をしないときを考えれば θ はある定数 θ_0 が存在して $\theta = \theta_0$ 一定となる。すなわち、角速度と角加速度は $\mathbf{0}$ となるため全てのトルクを打ち消すように拘束トルクは与えられるが、このとき剛体の任意の位置の速度は \mathbf{v}_g となるため、拘束力を $\mathbf{F}_{\theta,c}$ とすれば

$$\mathbf{F}_{\theta,c} \cdot \mathbf{v}_g = 0$$

となることがわかる。また、重心位置からの変位 \mathbf{x}_r により拘束トルク $\boldsymbol{\tau}_{\theta,c}$ は

$$\boldsymbol{\tau}_{\theta,c} = \mathbf{x}_r \times \mathbf{F}_{\theta,c} = -\boldsymbol{\tau}$$

とあらわされる。これを満たすような \mathbf{x}_r と $\mathbf{F}_{\theta,c}$ の組み合わせは無限に存在し、 $\mathbf{F}_{\theta,c}$ を \mathbf{v}_g と直交するように定めても $\mathbf{F}_{\theta,c}$ には定数倍だけ任意性があるため、 $C_\theta(\theta, t) = 0$ による拘束力は一意に定義することができない。さらに、複数の位置から拘束力が作用する場合をも考えればその組み合わせはさらに増える。

$C_\theta(\theta, t) = 0$ が時間変化をしないとき、これを満たすような最も単純な拘束力の例としては偶力である。角速度方向に平行な偶力による拘束力 ($\mathbf{F}_{\theta,c}, -\mathbf{F}_{\theta,c}$) を考えれば、このとき拘束トルクは角速度方向に垂直となるため

$$(\mathbf{F}_{\theta,c} - \mathbf{F}_{\theta,c}) \cdot \mathbf{v}_g + \boldsymbol{\tau}_{\theta,c} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$$

となり、拘束が仕事をしないことが確かめられる。このとき、 $\boldsymbol{\tau}_{\theta,c}$ は自由に \mathbf{x}_r を決めることができることから $\boldsymbol{\tau}_{\theta,c} = -\boldsymbol{\tau}$ を満たす \mathbf{x}_r は存在する。このように、一般に $C_\theta(\theta, t) = 0$ のような拘束は考えることができない。

$C_x(\mathbf{x}_p, t) = \mathbf{0}$ についてはベクトルの成分ごとで考えれば $C_x(\mathbf{x}_p, t) = 0$ と同様に考えることができるため、拘束力 $\mathbf{F}_{x,c}$ は乗数 $\boldsymbol{\lambda}_x = (\lambda_{1,x}, \lambda_{2,x}, \lambda_{3,x})$ により

$$\mathbf{F}_{x,c} = (\nabla C_{1,x} \quad \nabla C_{2,x} \quad \nabla C_{3,x}) \boldsymbol{\lambda}_x = \nabla C_{1,x} \lambda_{1,x} + \nabla C_{2,x} \lambda_{2,x} + \nabla C_{3,x} \lambda_{3,x}$$

とあらわされる。実際、ベクトルによる拘束は3つのスカラーによる位置拘束と考えることができ、 \mathbf{x}_p の軌道は全ての拘束面の共通の部分集合となるため、運動可能条件としては全ての拘束面が共通の部分集合をもつことである。さらに、3つの曲面が独立で共通の部分集合をもつならばそれはただ1つの点となるため、 \mathbf{x}_p は空間上で固定され、 \mathbf{x}_p を中心とした回転運動のみをすることがわかる。

次に、速度拘束における拘束力および拘束トルクについて考える。まず、 c_0 および \mathbf{C}_0 は時間変化する拘束により生じる項であるため、これが拘束により運動エネルギーを変化させる。つまり、時間変化しない拘束が仕事をしないという条件より

$$\boldsymbol{\Phi}_c^T \boldsymbol{\Omega} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{c}_v^T & \mathbf{c}_\omega^T) \boldsymbol{\Omega} = 0 \\ (C_v & C_\omega) \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0} \end{cases}$$

である。同様にして、拘束が時間するときには仕事に関する補正項 w が生じ

$$\boldsymbol{\Phi}_c^T \boldsymbol{\Omega} + w = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{c}_v^T & \mathbf{c}_\omega^T) \boldsymbol{\Omega} + c_0 = 0 \\ (C_v & C_\omega) \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{C}_0 = \mathbf{0} \end{cases}$$

とあらわされる。つまり、スカラーによる拘束条件については係数比較をすることで

$$\boldsymbol{\Phi}_c^T \boldsymbol{\Omega} \propto (\mathbf{c}_v^T \quad \mathbf{c}_\omega^T) \boldsymbol{\Omega} \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}_c \parallel \begin{pmatrix} \mathbf{c}_v \\ \mathbf{c}_\omega \end{pmatrix}$$

となり、乗数 λ_v により

$$\Phi_c = \lambda_v \begin{pmatrix} \mathbf{c}_v \\ \mathbf{c}_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_v \mathbf{c}_v \\ \lambda_v \mathbf{c}_\omega \end{pmatrix}$$

とあらわすことができる。同様にしてベクトルによる拘束条件もベクトルの各成分がスカラーによる拘束条件となることから、乗数 λ_v により

$$\Phi_c = \begin{pmatrix} C_v^T \\ C_\omega^T \end{pmatrix} \lambda_v = \begin{pmatrix} C_v^T \lambda_v \\ C_\omega^T \lambda_v \end{pmatrix}$$

とあらわすことができる。

以上より、それぞれの拘束条件において拘束条件と元の運動方程式による連立方程式により乗数 $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_\omega$ を除去することで拘束力を求めることができる。

1.4 平行軸の定理

平行軸の定理

質量 M の剛体について、重心を通る回転軸における慣性テンソル I_g とそこから $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ だけ平行移動した慣性テンソル I について

$$I = I_g + M \begin{pmatrix} a_y^2 + a_z^2 & -a_y a_x & -a_z a_x \\ -a_x a_y & a_x^2 + a_z^2 & -a_z a_y \\ -a_x a_z & -a_y a_z & a_x^2 + a_y^2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。これを平行軸の定理という。

Proof.

重心位置 $\mathbf{x}_g = (x_g, y_g, z_g)$ からの相対位置を $\mathbf{x}_r = (x_r, y_r, z_r)$ としたとき、変位 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ に対する剛体の質量密度分布 $m(\mathbf{x})$ に対して I は

$$I = \int_V m(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} (y_r - a_y)^2 + (z_r - a_z)^2 & -(y_r - a_y)(x_r - a_x) & -(z_r - a_z)(x_r - a_x) \\ -(x_r - a_x)(y_r - a_y) & (x_r - a_x)^2 + (z_r - a_z)^2 & -(z_r - a_z)(y_r - a_y) \\ -(x_r - a_x)(z_r - a_z) & -(y_r - a_y)(z_r - a_z) & (x_r - a_x)^2 + (y_r - a_y)^2 \end{pmatrix} dV$$

とあらわされ、この行列の (1,1) 成分についてを証明を与える。

$$\begin{aligned} I_{(1,1)} &= \int_V m(\mathbf{x}) ((y_r - a_y)^2 + (z_r - a_z)^2) dV(\mathbf{x}) \\ &= \int_V m(\mathbf{x}) (y_r^2 + z_r^2) dV(\mathbf{x}) + \int_V m(\mathbf{x}) (a_y^2 + a_z^2) dV(\mathbf{x}) - 2 \int_V m(\mathbf{x}) (y_r a_y + z_r a_z) dV(\mathbf{x}) \\ &= I_{g(1,1)} + M(a_y^2 + a_z^2) - 2 \left(\int_V m(\mathbf{x}) (y a_y + z a_z) dV(\mathbf{x}) - \int_V m(\mathbf{x}) (y_g a_y + z_g a_z) dV(\mathbf{x}) \right) \\ &= I_{g(1,1)} + M(a_y^2 + a_z^2) - 2(M \mathbf{x}_g \cdot (0, a_y, a_z) - M(y_g a_y + z_g a_z)) \\ &= I_{g(1,1)} + M(a_y^2 + a_z^2) \end{aligned}$$

同様のことが他の成分でも成り立つ。

よって、命題は証明された。

□

この定理を用いることで、重心を通る回転軸についての慣性テンソルが既知であるときの軸を平行移動させたときの慣性テンソルやその逆を得ることができる。