古典力学 -連続体の運動-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 9 月 14 日

目次

第 1 章

連続体の運動

1.1 連続体の定義

定義 1.

一般に物体は原子や分子といった粒子によって構成されており，物体は変形する．このような粒子の分布は不連続であるが，微視的であるため無視をすることであたかも連続であるかのように扱うことができ，これを**連続体近似**という．また，このような近似をした理想的な物体を**連続体**という．

連続体を記述する方法として，粒子のある 1 点に注目してその初期位置 $\boldsymbol{x}_0$ と時間 t に対する変位 $\boldsymbol{x}$ をあらわす方法であり，これを**ラグランジュ表示**という．

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$$

また，空間のある 1 点に注目してその位置 $\boldsymbol{x}$ の速度 $\boldsymbol{v}$ をあらわす方法があり，これを**オイラー表示**という．

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$$

これは空間における速度場をあらわしており，速度は粒子の移動速度をあらわすことからラグランジュ表示の変位の時間微分に等しい．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$$

また，定義よりラグランジュ表示の $\boldsymbol{x}$ は t の従属変数であり，オイラー表示の $\boldsymbol{x}$ と t はそれぞれ独立変数である．

変位 $\boldsymbol{x}$ におけるある連続体におけるスカラーの物理量 $A(\boldsymbol{x}, t)$ が与えられたとき，これの時間微分を考える．

オイラー表示による時間微分を考えれば，空間で位置は固定であるため時間偏微分を与えればいい．

$$\frac{\partial A}{\partial t}$$

このようなオイラー表示における時間微分を**オイラー微分**もしくは**空間微分**という．

ラグランジュ表示による時間微分を考えれば，粒子は初期位置 $\boldsymbol{x}_0$ に対して $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t)$ と運動すると考えられるため，粒子の流れに沿った位置で時間微分を与えればいい．まず，A の微小時間変化 Δt による微小変化量 ΔA をテイラー展開により与える．なお，粒子の速度を $\boldsymbol{v}$ とする．

$$\begin{aligned}
\Delta A =& A(\boldsymbol{x} + \Delta t\boldsymbol{v}, t + \Delta t) - A(\boldsymbol{x}, t) \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Delta t^k \left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right)^k A(\boldsymbol{x}, t) - A(\boldsymbol{x}, t) \\
=& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Delta t^k \left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right)^k A(\boldsymbol{x}, t)
\end{aligned}$$

これを Δt で割り，$\Delta t \to 0$ とすることで時間微分を得る．

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Delta t^{k-1} \left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right)^k A = \left(\boldsymbol{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right) A$$

この微分を特別に微分演算子 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ を用いて以下のようにあらわすとする．

$$\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) A + \frac{\partial A}{\partial t}$$

このようなラグランジュ表示における時間微分を**ラグランジュ微分**もしくは**物質微分**という．この数式は，空間全体の時間変化率に加えて粒子の微小変位による変化量を加算していることを示している．

また，これらの微分はベクトルやテンソルに対しても同様である．

1.2　連続体に作用する力

定義 2.

物体の質量や体積に比例する力のことを**体積力**という．例えば重力がこれにあたる．変位 $\boldsymbol{x}$ に対する密度 $\rho(\boldsymbol{x}, t)[kg/m^3]$ とその単位質量あたりに作用する加速度場 $\boldsymbol{g}[m/s^2]$ が体積領域 V で作用するとき，体積力は以下のようにあらわされる．

$$\int_V \rho(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{g} \mathrm{d}V$$

また，物体の断面の面積に比例する力のことを**面積力**という．例えば圧力がこれにあたる．断面 S とその単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と S 上の変位 $\boldsymbol{x}[m]$ によってあらわされる力 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})[N/m^2]$ を**応力**もしくは**圧力**といい，S 全体での力は以下のようにあらわされる．

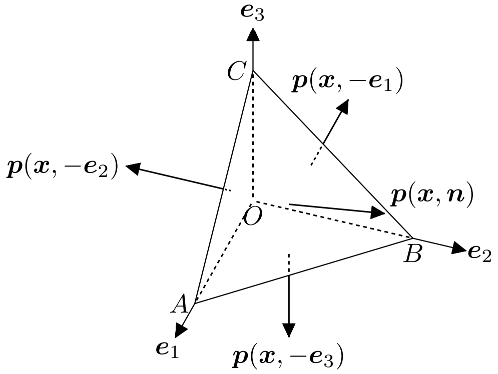
$$\int_S \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) \mathrm{d}S$$

また，応力のうち法線方向で引っ張り合う応力を**引張応力**，押し合う応力を**圧縮応力**，応力の作用する面に平行に作用する応力を**せん断力**という．

作用反作用の法則により面の裏では逆方向の応力が作用すると考えることができ，それは以下の関係式によって特徴づけられる．

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0}$$

以下のような直交単位ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ で構成されている十分に小さい四面体を考え，O の位置を $\boldsymbol{x}$，$\triangle ABC = \Delta S$ の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ としたときの応力を $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ とする．また，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{e}_i)$ に対応する面を ΔS^i とする．



この四面体の領域 ΔV と加速度場を $\boldsymbol{g}$ に対する四面体の加速度 $\boldsymbol{a}$ および密度 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ を与えたとき，運動方程式は以下のようにあらわされる．

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) \Delta V \boldsymbol{a} = \rho(\boldsymbol{x}, t) \Delta V \boldsymbol{g} + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) \Delta S + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{e}_i) \Delta S^i$$

ここで，$|\overrightarrow{OA}|, |\overrightarrow{OB}|, |\overrightarrow{OC}| \to 0$ の極限を四面体が相似縮小するように取ることを考えれば，ΔV は 3 次の微小量で ΔS および ΔS^i は 2 次の微小量であることから ΔV は無視することができ，以下の式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})\Delta S + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{e}_i)\Delta S^i =& 0\\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})\Delta S =& \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)\Delta S^i\end{aligned}$$

また，ΔS^i は ΔS の射影であることから $\Delta S^i = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_i)\Delta S$ となる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})\Delta S =& \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_i)\Delta S\\ \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) =& (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)\end{aligned}$$

つまり，微小面に作用する応力は行列 $\sigma = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_1) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_2) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_3)\end{pmatrix}$ と行列 $T = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}$ を用いることで $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) = \sigma T^T\boldsymbol{n}$ とあらわされる．また，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)$ と $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})$ は暗黙的に同じ座標系として扱われているが，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ の座標系で $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_i)$ は扱われるべきであるため以下のようになる．

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) = T\sigma T^T\boldsymbol{n}$$

ここで，σ に対する定義を与える．

定義 3.

直交座標系 S において，微小面とその単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ および微小面に作用する応力 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ を与えたとする．また，直交基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ で構成されている直交座標系 S' を与え，S と S' の基底変換を示す線形写像 $T : S \to S'$ を与える．

このとき，S' 上で定義される混合テンソル σ を用いることで $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n})$ 以下のようにあらわされる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{n}) =& T\sigma T^T\boldsymbol{n}\\ =& \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_1) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_2) & \boldsymbol{p}(\boldsymbol{e}_3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}^T\boldsymbol{n}\\ =& \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^1_1 & \sigma^1_2 & \sigma^1_3\\ \sigma^2_1 & \sigma^2_2 & \sigma^2_3\\ \sigma^3_1 & \sigma^3_2 & \sigma^3_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}^T\boldsymbol{n}\end{aligned}$$

このとき，σ を**応力テンソル**という．また，応力テンソルの成分の対応により，対角成分は垂直応力を示しており，非対角成分はせん断応力を示している．

まず，応力の基底変換について考える．元の座標系を S とし，基底変換を示す線形写像 $T_{S'} : S \to S'$ を与えれば，S' 上の ΔS に対する単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}'$，応力を $\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}')$ とすれば，以下のような関係式が得られる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) =& T\sigma T^T\boldsymbol{n}\\ T_{S'}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) =& T_{S'}T\sigma T^T T_{S'}^{-1}T'\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{p}'(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}') =& T_{S'}T\sigma T^T T_{S'}^{-1}\boldsymbol{n}'\end{aligned}$$

つまり，応力の基底変換は応力テンソルの相似変換によって対応付けられ，これは線型変換でも同様である．特に，$T_{S'} \circ T = \mathrm{id}_{S'}$ とすれば以下のように単純化される．

$$\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{n}') = \sigma\boldsymbol{n}'$$

これは，応力と応力テンソルそれぞれが同一座標系で扱われていることを示している．そのため，以後 S 上で応力の式は T を省略して考えることができる．つまり，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}) = \sigma\boldsymbol{n}$ である．

体積領域 V およびその表面 ∂V における応力テンソルを考える．連続体内で角運動量保存則を満たす，つまりはトルクが $\boldsymbol{0}$ であるとすれば変位 $\boldsymbol{x}$ を用いることで以下の関係式が成り立つ．

$$\int_{\partial V}\boldsymbol{x}\times(\sigma^i_j n^j)\mathrm{d}S + \int_V \rho\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{g}\mathrm{d}V = \boldsymbol{0}$$

外積は 3 階のエディントンのイプシロンを用いて $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^i=\varepsilon^i_{jk}a^jb^k$ というようにあらわすことができることからガウスの発散定理を用いることで応力部は以下のような変形ができる．なお，δ はクロネッカーのデルタである．

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}\varepsilon^i_{jk}x^j\sigma^k_l n^l\mathrm{d}S&=\int_V\frac{\partial}{\partial x^l}(\varepsilon^i_{jk}x^j\sigma^k_l)\mathrm{d}V\\&=\int_V\varepsilon^i_{jk}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^l}\sigma^k_l+x^j\frac{\partial\sigma^k_l}{\partial x^l}\right)\mathrm{d}V\\&=\int_V\varepsilon^i_{jk}\left(\delta^{jl}\sigma^k_l+x^j\frac{\partial\sigma^k_l}{\partial x^l}\right)\mathrm{d}V\end{aligned}$$

ここで，このとき面積力と体積力の和は $\mathbf{0}$ となることから，これに関する関係式を導出する．

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}\sigma^i_j n^j\mathrm{d}S+\int_V\rho g^i\mathrm{d}V&=0\\\int_V\frac{\partial\sigma^i_j}{\partial x^j}\mathrm{d}V+\int_V\rho g^i\mathrm{d}V&=0\\\frac{\partial\sigma^i_j}{\partial x^j}+\rho g^i&=0\end{aligned}$$

これを用いることでトルクに関する式を変形する．

$$\begin{aligned}\varepsilon^i_{jk}\left(\delta^{jl}\sigma^k_l+x^j\frac{\partial\sigma^k_l}{\partial x^l}\right)+\rho\varepsilon^i_{jk}x^jg^k&=0\\\varepsilon^i_{jk}\left(\delta^{jl}\sigma^k_l+x^j\left(\frac{\partial\sigma^k_l}{\partial x^l}+\rho g^k\right)\right)&=0\\\varepsilon^i_{jk}\delta^{jl}\sigma^k_l&=0\end{aligned}$$

この縮約を i について展開すると以下のようになる．

$$\begin{cases}\sigma^3_2-\sigma^2_3=0 & (i=1)\\\sigma^1_3-\sigma^3_1=0 & (i=2)\\\sigma^2_1-\sigma^1_2=0 & (i=3)\end{cases}$$

よって，以下の定理を与えることができる．

応力テンソルの対称性

連続体が角運動量保存則を満たすとき，応力テンソルは対称テンソルである．

Proof.

導入より明らか．

□

つまり，直交行列を用いることで応力テンソルは対角化が必ずできる．このときの座標系を**主軸**もしくは**応力主軸**といい，垂直応力のことを**主応力**という．

1.3 基礎方程式

連続の方程式

質量保存則を仮定することで，空間の各点 $\boldsymbol{x}[m]$ における密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)[kg/m^3]$ と速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)[m/s]$ をもつ連続体について以下の等式が成り立つ．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$$

これを**連続の方程式**もしくは連続体における**質量保存則**という．また，物質微分を用いる場合は以下のようになる．

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

Proof.

質量保存則より，体積領域 V とその表面 ∂V に対して体積の減少の時間変化率は単位時間の連続体の流出に等しいことから，ガウスの発散定理よりただちに導かれる．

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\mathrm{d}V&=\int_{\partial V}\rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V+\int_V\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}V&=0\\
\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})&=0
\end{aligned}$$

この式に対して物質微分の関係式を代入する．

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})&=0\\
\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho+(\nabla\rho)\cdot\boldsymbol{v}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}&=0\\
\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}&=0
\end{aligned}$$

よって，命題が証明された．

□

体積領域 V とその表面 ∂V で，∂V 上の変位 $\boldsymbol{x}$ に対する単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ が与えられたとき，$\boldsymbol{x}$ における ∂V 上での単位面積当たり単位時間当たりの流出する運動量は $(\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{v}$ である．よって，単位時間における運動量の流出はガウスの発散定理より以下のようになる．

$$\int_{\partial V}\rho v^i v_j n^j\mathrm{d}S=\int_V\frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v_j)\mathrm{d}V$$

また，$\rho v^i v_j$ は混合テンソルであり，これを行列 $T=(T^i{}_j)$ で $\boldsymbol{v}=(v_x,v_y,v_z)$ に対して以下のようにあらわされる．

$$T=\rho\begin{pmatrix}v_x^2&v_xv_y&v_xv_z\\v_yv_x&v_y^2&v_yv_z\\v_zv_x&v_zv_y&v_z^2\end{pmatrix}$$

これを**運動量テンソル**といい，対称テンソルであることが自明である．また，体積力に対する加速度場 $\boldsymbol{g}$ と応力テンソル σ を用いれば，連続体に作用する力 $\boldsymbol{f}$ は以下のようになる．

$$f^i=\int_V\left(\frac{\partial\sigma^i_j}{\partial x^j}+\rho g^i\right)\mathrm{d}V$$

$\boldsymbol{f}=0$ のとき，運動量全体の減少の時間変化率について以下の式が成り立つ．

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v^i \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial T^i{}_j}{\partial x^j}\mathrm{d}V$$

ここで，運動量の変化について考えると，運動量の全体の変化は V に流入した粒子の運動量と外力による力積の和に等しい．よって，運動方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho v^i \mathrm{d}V &= -\int_V \frac{\partial T^i{}_j}{\partial x^j}\mathrm{d}V + f^i\\ \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i)\mathrm{d}V &= -\int_V \frac{\partial T^i{}_j}{\partial x^j}\mathrm{d}V + \int_V \left(\frac{\partial \sigma^i_j}{\partial x^j}+\rho g^i\right)\mathrm{d}V\\ \frac{\partial \rho}{\partial t}v^i + \rho\frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial T^i{}_j}{\partial x^j} &= \frac{\partial \sigma^i_j}{\partial x^j}+\rho g^i\end{aligned}$$

また，$T^i{}_j$ に関する項は $T^i{}_j = T^j{}_i$ より偏導関数について展開可能である．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v_j v^i) &= \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v_j)v^i + \rho v_j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\\ \Rightarrow\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\rho \boldsymbol{v}\otimes \boldsymbol{v}) &= \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + \rho(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

この結果を運動方程式に代入する．

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t}v^i + \rho\frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v_j)v^i + \rho v_j\frac{\partial v^i}{\partial x^j} &= \frac{\partial \sigma^i_j}{\partial x^j}+\rho g^i\\ \rho\frac{\partial v^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v_j)\right)v^i + \rho v_j\frac{\partial v^i}{\partial x^j} &= \frac{\partial \sigma^i_j}{\partial x^j}+\rho g^i\\ \frac{\partial v^i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v^i}{\partial x^j} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma^i_j}{\partial x^j}+g^i\end{aligned}$$

また，この左辺に着目すると，これは物質微分に等しい．よって，以下の定義が与えられる．

定義 4.

空間の各点 $\boldsymbol{x}[m]$ における密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)[kg/m^3]$ と速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)[m/s]$ をもつ連続体について，応力テンソル σ と体積力に関する加速度場 $\boldsymbol{g}[m/s^2]$ が与えられたとき，以下の運動方程式が成り立つ．

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g} \ \Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{D}v^i}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma^i_j}{\partial x^j} + g^i$$

これを**オイラーの方程式**という．

1.4　連続体の変形

一般に連続体は剛体とは違い，粒子の相対位置を変えるため変形をする．空間上の粒子の変位 $\boldsymbol{x}$ が t 秒で $\boldsymbol{x}$ から適当な経路によって $\varphi(\boldsymbol{x},t)$ に移動したとする．これを示す関数を $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t)$ と定義する．

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t) = \varphi(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{x}$$

ここで，十分に小さい $\Delta\boldsymbol{x}$ を用いて $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$ の粒子の変位が $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ となれば，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}$ は $\Delta\boldsymbol{r}$ の変形を起こしているといえる．また，$\Delta\boldsymbol{r}$ をテイラー展開を用いることで以下のようになる．

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\Delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla\right)^k \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\Delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla\right)^k \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t)\end{aligned}$$

これをテンソルをであらわす．

$$\Delta r^i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\Delta x_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^k r^i$$

これの両辺を Δx_j で割り，$\Delta x_j \to 0$ としたテンソルを D と定義する．

$$D^i{}_j = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\Delta r^i}{\Delta x_j} = \lim_{\Delta x_j \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Delta x_j)^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)^k r^i = \frac{\partial r^i}{\partial x_j}$$

これを**変形テンソル**といい，ヤコビ行列に等しいことがわかる．ここで，D を対称成分と反対称成分の和に分解し，それぞれを ε，F と定義する．

$$\begin{cases} \varepsilon^i{}_j = \dfrac{1}{2}(D^i{}_j + D^j{}_i) \\ F^i{}_j = \dfrac{1}{2}(D^i{}_j - D^j{}_i) \end{cases}$$

ε の対角成分以外を 0 として考えたとき，十分に小さい $\Delta \boldsymbol{x}$ に対して $\varepsilon \Delta \boldsymbol{x}$ は軸方向の伸縮の変形を示している．これを**伸縮歪み**という．また，対角成分のみを 0 として考えたとき，$\Delta \boldsymbol{x}$ に対して軸方向以外のずれの変形を示している．これを**ずれ歪み**もしくは**せん断歪み**という．このことより，ε は**歪みテンソル**という．

また，$\boldsymbol{\Omega} = 2(F^3{}_2, F^1{}_3, F^2{}_1)$ とすれば，$F\Delta\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \times \Delta\boldsymbol{x}$ となり，$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{r}$ である．このことより，$F^i{}_j$ は回転の変形を示している．つまり，この変形は形状を変えない．

次に，変形による体積の増減を考える．変形前の体積 $V = \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$ に対して，変形後の体積 V' は $\Delta\boldsymbol{x} + D\Delta\boldsymbol{x}$ の各 Δx^i による線形結合によってあらわされるベクトルによって構成される平行六面体となると考えられることから以下のようになる．

$$V' = \left| \begin{pmatrix} 1 + D^1{}_1 \\ D^2{}_1 \\ D^3{}_1 \end{pmatrix} \Delta x^1 \quad \begin{pmatrix} D^1{}_2 \\ 1 + D^2{}_2 \\ D^3{}_2 \end{pmatrix} \Delta x^2 \quad \begin{pmatrix} D^1{}_3 \\ D^2{}_3 \\ 1 + D^3{}_3 \end{pmatrix} \Delta x^3 \right| = \begin{vmatrix} 1 + D^1{}_1 & D^1{}_2 & D^1{}_3 \\ D^2{}_1 & 1 + D^2{}_2 & D^2{}_3 \\ D^3{}_1 & D^3{}_2 & 1 + D^3{}_3 \end{vmatrix} V$$

変形による体積の増加量 $V' - V$ を V で割った V の変化割合を**体積歪み**といい，D の各成分は十分小さいと考えられることから 2 次以降の項を無視することで以下のようになる．

$$\frac{V' - V}{V} = (1 + D^1{}_1 + D^2{}_2 + D^3{}_3) - 1 = \frac{\partial r^i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \boldsymbol{r}$$

これは体積歪みが伸縮歪みの総和によってあらわされることを意味する．

次に，連続体の時間変化とともに変化する変形を考える．$\boldsymbol{x}$ に存在する粒子の速度を $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ とし，偏微分の順序の変更が可能であるとすれば，変形を示すテンソルは変位項を速度項に置き換えたものとなる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D^i{}_j}{\partial t} = \dfrac{\partial v^i}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial \varepsilon^i{}_j}{\partial t} = \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial v^i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v^j}{\partial x_i} \right) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times \boldsymbol{v} \end{cases}$$

それぞれ第 1 式を**変形速度テンソル**，第 2 式を**歪み速度テンソル**，第 3 式を**渦度**という．また，変形速度テンソルの対角成分を**伸縮歪み速度**といい，非対角成分を**せん断歪み速度**という．特に渦度は $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ とあらわされる．

ベクトル解析の恒等式より以下の関係式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{v}|^2 = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}$$

よって，オイラーの方程式は以下のようにあらわすことができる．

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{v}|^2 - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}$$

これは連続体の運動で渦が生成されたときおよび生成されないときの項に分けている．

また，D の和の分解について考えたが，行列の極分解により直交テンソル R と正定値対称テンソル U, V を用いることで $D = RU = VR$ というように積に分解ができる．R は回転もしくは反転を示し，U と V は歪みを示すことから U を**右ストレッチテンソル**，V を**左ストレッチテンソル**という．

U と V の 2 乗をそれぞれ**右コーシー・グリーン・テンソル**，**左コーシー・グリーン・テンソル**といい，以下のような関係式で与えられる．

$$\begin{cases} C = D^T D = U^T R^T R U = U^2 \\ B = D D^T = V R R^T V^T = V^2 \end{cases}$$

また，$\Delta \boldsymbol{x}$ と $\Delta \boldsymbol{r}$ の長さの差を与えることができる．なお，単位テンソルを I とする．

$$\begin{aligned} |\Delta \boldsymbol{r}|^2 - |\Delta \boldsymbol{x}|^2 =& \Delta \boldsymbol{x}^T D^T D \Delta \boldsymbol{x} - \Delta \boldsymbol{x}^T \Delta \boldsymbol{x} \\ =& \begin{cases} \Delta \boldsymbol{x}^T (D^T D - I) \Delta \boldsymbol{x} \\ \Delta \boldsymbol{r}^T (I - (D D^T)^{-1}) \Delta \boldsymbol{r} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで，以下のようなテンソル E, e を定義する．

$$\begin{cases} E = \dfrac{1}{2}(C - I) \\ e = \dfrac{1}{2}(I - B^{-1}) \end{cases}$$

それぞれを**グリーンの歪みテンソル**，**アルマンシの歪みテンソル**という．これを用いることで変化量の差以下のようになる．

$$|\Delta \boldsymbol{r}|^2 - |\Delta \boldsymbol{x}|^2 = \begin{cases} 2 \Delta \boldsymbol{x}^T E \Delta \boldsymbol{x} \\ 2 \Delta \boldsymbol{r}^T e \Delta \boldsymbol{r} \end{cases}$$

また，E と e をテンソルで表示することを考えれば，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{r}$ による変位ベクトル $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}$ を用いることで以下のようになる．なお，δ はクロネッカーのデルタである．

$$\begin{aligned} E^i{}_j =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r_k}{\partial x^i} \frac{\partial r^k}{\partial x_j} - \delta^i_j \right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (x_k + u_k)}{\partial x^i} \frac{\partial (x^k + u^k)}{\partial x_j} - \delta^i_j \right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x^i} + \delta^i_k \right) \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_j} + \delta^k_j \right) - \delta^i_j \right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x^i} + \frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \frac{\partial u^k}{\partial x_j} \right) \\ e^i{}_j =& \frac{1}{2}\left(\delta^i_j - \frac{\partial x_k}{\partial r^i} \frac{\partial x^k}{\partial r_j} \right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\delta^i_j - \frac{\partial (r_k - u_k)}{\partial r^i} \frac{\partial (r^k - u^k)}{\partial r_j} \right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\delta^i_j - \left(\delta^i_k - \frac{\partial u_k}{\partial r^i} \right) \left(\delta^k_j - \frac{\partial u^k}{\partial r_j} \right) \right) \\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial r^i} + \frac{\partial u^i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_k}{\partial r^i} \frac{\partial u^k}{\partial r_j} \right) \end{aligned}$$

次に微小時間による変形を考える．十分に小さい時間 Δt による変化 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, \Delta t)$ はテイラー展開により以下のように定義される．

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \frac{\partial^k \boldsymbol{x}}{\partial t^k}$$

同様にして D は $t = 0$ のときを D_0 とすれば以下のようになる．なお，恒等的に $D_0 = I$ である．

$$D = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \frac{\partial^k D_0}{\partial t^k}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ での速度 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ と $\boldsymbol{r}$ での速度 $\boldsymbol{v_r}(\boldsymbol{x},t)$ を導入したとき，$L=\frac{\partial D}{\partial t}D^{-1}$ を定義することにより，$\Delta\boldsymbol{r}$ での平均速度 $\Delta\boldsymbol{v_r}$ について以下の関係式が得られる．

$$\Delta\boldsymbol{v_r}=\frac{\partial\boldsymbol{v_r}}{\partial\boldsymbol{x}}\cdot\Delta\boldsymbol{x}=\frac{\partial D}{\partial t}\Delta\boldsymbol{x}=\frac{\partial D}{\partial t}D^{-1}D\Delta\boldsymbol{x}=L\Delta\boldsymbol{r}$$

このとき，L を**速度勾配テンソル**という．また，L は一般に以下のようにあらわすことができる．

$$L^i{}_j=\frac{\partial D^i{}_k}{\partial t}(D^{-1})^k{}_j=\frac{\partial v_r^i}{\partial x_k}\frac{\partial x^k}{\partial r_j}=\frac{\partial v_r^i}{\partial r_j}=\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{\partial r^i}{\partial t}\right)$$

$t=0$ における速度勾配テンソルを L_0 とすれば D は以下のようにあらわすことができる．

$$D=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta t^k}{k!}\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}\left(\frac{\partial D_0}{\partial t}D_0^{-1}D_0\right)=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta t^k}{k!}\frac{\partial^{k-1}L_0}{\partial t^{k-1}}$$

D をテンソルで表示する．なお，δ はクロネッカーのデルタである．

$$\begin{aligned}D^i{}_j=&\delta^i_j+\frac{\partial}{\partial r_j(\boldsymbol{x},0)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta t^k}{k!}\frac{\partial^k r^i(\boldsymbol{x},0)}{\partial t^k}\\=&\delta^i_j+\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta t^k}{k!}\frac{\partial^k x^i}{\partial t^k}\\=&\delta^i_j+\frac{\partial}{\partial x_j}(r^i(\boldsymbol{x},\Delta t)-x^i)\\=&\frac{\partial r^i}{\partial x_j}\end{aligned}$$

よって，D の定義式と一致することがわかる．また，D^{-1} は以下のようになる．

$$\begin{aligned}(D^{-1})^i{}_j=&\frac{\partial x^i}{\partial r_j}\\=&\frac{\partial(r^i-u^i)}{\partial r_j}\\=&\delta^i_j-\frac{\partial}{\partial r_j}(r^i(\boldsymbol{x},\Delta t)-x^i)\\=&\delta^i_j-\frac{\partial}{\partial r_j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta t^k}{k!}\frac{\partial^k x^i}{\partial t^k}\end{aligned}$$

ここで，Δt は十分に小さいことから $O(\Delta t^2)$ 以降を無視できるとすれば，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},\Delta t)=\boldsymbol{x}+\Delta t\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$ であり，これを用いることで以下の関係式が得られる．

$$\begin{aligned}DD^{-1}=&I\\\left(I+\Delta t\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)\left(I-\Delta t\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{r}}\right)=&I\\I-\Delta t^2\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{x}}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{r}}+\Delta t\left(-\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\boldsymbol{x}}\right)=&I\\\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{x}}=&\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$

よって，以下の関係式が得られる．

$$E^i{}_j=e^i{}_j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x^i}+\frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right)$$

これは微小時間の変形で $E=e$ であることを示しており，このように微小変化 Δt において $O(\Delta t^2)$ のオーダーを無視することで線型に近似することができる考え方を**微小変形理論**という．

また，微小変形理論を用いることで以下の関係式をも得ることができる．

$$
\begin{aligned}
DD^T =& \left(I + \Delta t \frac{\partial D_0}{\partial t}\right)\left(I + \Delta t \frac{\partial D_0^T}{\partial t}\right) \\
=& I + \Delta t^2 \frac{\partial D_0}{\partial t}\frac{\partial D_0^T}{\partial t} + \Delta t \left(\frac{\partial D_0}{\partial t} + \frac{\partial D_0^T}{\partial t}\right) \\
=& I + \Delta t \left(\frac{\partial D_0}{\partial t} + \frac{\partial D_0^T}{\partial t}\right) \\
=& D^T D
\end{aligned}
$$

以上より，微小変形では $C = B$ であることがわかる．