電磁気学 -基本法則-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 10 月 18 日

目次

第 1 章

マクスウェルの方程式

1.1　電気における法則

定義 1.

物質を構成する最小単位を**素粒子**といい，素粒子のもつ性質の 1 つとして，原子や分子の電子の移動によって生じる電子の偏りを**帯電**という．また，その程度を**電荷量**もしくは**電気量**といい，これをあらわす指標を**クーロン**といい単位は C である．これは，単に**電荷**ということもある．電荷は正負の値を取り，正のときを**正電荷**，負のときを**負電荷**といい，陽子が正電荷をもち電子が負電荷をもつ．電荷の正負を無視して絶対値をとった量を**電気素量**という．

また，電荷を帯びた素粒子を**荷電粒子**といい，素粒子の大きさを無視することができるときは**点電荷**ということもある．特に，閉じた系における電荷の総和は一定になるとされており，これを**電荷保存則**という．

電荷間に作用する力の法則として，ヘンリー・キャヴェンディッシュが実験的に確かめて，シャルル・ド・クーロンによって再発見された以下の法則が成り立つ．

電荷におけるクーロンの法則

2 つの荷電粒子の電荷 $Q_1, Q_2[C]$ とその距離 $r[m]$ について，比例定数 $k[C^{-2} \cdot N \cdot m^2]$ を用いることで力の大きさ $F[N]$ について，

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

という関係式が成り立つ．このとき，電荷の正負が異なるときは引力として力が作用し，正負が同じときは斥力として力が作用する．これを電荷における**クーロンの法則**という．また，k は物体の媒質によって変化し，媒体固有の定数 ε によって

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$$

とあらわされる．このとき，ε を**誘電率**といい，特に真空中においては ε_0 とあらわされ，$\varepsilon_0 \fallingdotseq 8.854 \times 10^{-14}\ C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}$ である．また，ε は媒質の等方性や線型性によって 2 階のテンソル量となるが，この場合は素粒子であるためスカラーとして扱われる．

荷電粒子におけるクーロンの法則をベクトルで表現するとき，変位 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に置かれた電荷 Q, q とその位相 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ および比例定数 k を用いることで力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = k\frac{qQ}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

とあらわされる．ここで，

$$\boldsymbol{E} = k\frac{Q}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

とおけば

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

となり，$\boldsymbol{x}_1$ に置かれた Q によって放射状にベクトル場 $\boldsymbol{E}[N/C]$ が生じ，$\boldsymbol{x}_2$ に q を置いたとき $\boldsymbol{F}$ を生じると解釈することができる．このとき，$\boldsymbol{E}$ を**電場**もしくは**電界**といい，時間変化のない電界を**静電界**という．また，電界は誘電率に依存するが，依存しない新しいベクトル場 $\boldsymbol{D}$ を

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

と定義する．このとき，$\boldsymbol{D}[C/m^2]$ を**電束密度**という．また，曲面の面積 S に作用する電束密度を**電束**といい，これは電荷に等しい．これは荷電粒子で成り立つ式であり，一般の物体では誘電率は定数ではなく，電磁相互作用を考える必要があるため成り立たないとされる．

ここで，カール・フリードリヒ・ガウスによって発見された以下の法則を与える．

電界におけるガウスの法則

領域 V とその境界 ∂V を与えたとき，V 内に電荷 $Q[C]$ 存在して電束密度分布が $\boldsymbol{D}[C/m^2]$ となるとする．このとき，

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

が成り立つ．これを電界における**ガウスの法則**の**積分形**という．

電界におけるガウスの法則の微分形

電束密度分布が $\boldsymbol{D}[C/m^2]$ と電荷密度分布 $\rho[C/m^3]$ を与えたとき，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

が成り立つ．これを電界における**ガウスの法則**の**微分形**という．

Proof.

領域 V とその境界 ∂V では積分形よりガウスの発散定理を用いて

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V$$
$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

となり，領域が共通であるため積分の中身は等しく，$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ が得られる．

よって，命題は証明された．

□

次に，静電界 $\boldsymbol{E}$ におけるスカラーポテンシャル $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ を考える．ϕ が存在するならば，$\boldsymbol{E}$ の線積分は始点と終点にのみ依存することから，始点 $\boldsymbol{r}_1$ から終点 $\boldsymbol{r}_2$ による曲線 C により ϕ は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\int_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

となり，1 つの電荷の存在することを仮定すれば電界分布は連続であるため V は収束する．

また，エネルギーについては

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = Q\int_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

とあらわされ，静電場ではエネルギーは保存されなければならないため

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \ \Rightarrow\ \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

となる．よって，ストークスの定理より C の内部領域 S で

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} =&0\\ \int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} =&0\\ \nabla\times\boldsymbol{E} =&0\end{aligned}$$

となることから静電界ではスカラーポテンシャルが必ず存在する．

よって，以下の定義が与えられる．

定義 2.

静電界 $\boldsymbol{E}[N/C]$ が与えられたとき，始点 $\boldsymbol{r}_1[m]$ で終点 $\boldsymbol{r}_2[m]$ による曲線 C により

$$\phi = -\int_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

と定義した $\phi[J/C]$ を**電位**もしくは**静電ポテンシャル**といい，これを用いることで電界の単位は V/m とすることができる．また，$\boldsymbol{E}$ の電位の等しい点によって生成される面を**等電位面**といい，等電位面上の任意の曲線を**等電位線**という．　ガウスの法則より静電界における電位は電荷密度分布 $\rho[C/m^3]$ と誘電率 ε を用いて

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

を満たす．これを電位における**ポアソン方程式**といい，$\rho = 0$ の場合を電位における**ラプラス方程式**という．

電荷の位置を $\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{x}'$ から $\boldsymbol{r}$ だけ離れた電界の位置を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{r}$ とする．電荷密度分布 ρ 定義される空間領域 $V(\boldsymbol{x}')$ 全域で電界は総和を取ることで電界となるため，$V(\boldsymbol{x}')$ 全域で積分をして

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V(\boldsymbol{x}')} \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}')$$

となる．

電位におけるポアソン方程式の解は

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V(\boldsymbol{x}')} \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}')$$

となるが，これが境界条件を満たすことを確かめる．境界条件は $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi'$ であるため $\phi(\boldsymbol{x})$ の勾配を取ると，

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\phi'(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V(\boldsymbol{x}')} \rho(\boldsymbol{x}')\nabla_{\boldsymbol{x}}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V(\boldsymbol{x}')} \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}')$$

となり，電位におけるポアソン方程式は数学的に正しいということがわかる．

次に，電荷保存則を定式化するために以下の定義を与える．

定義 3.

単位時間あたりに流れる電荷の数を**電流**といい，単位は A で**アンペア**という．これは，電荷の流れる数 $Q(t)[C]$ と電流 $I[A]$ によって

$$I = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}$$

という関係式で与えられる．また，曲面 $S[m^2]$ あたりの電流を**電流密度**といい，$\boldsymbol{i}[I/m^2]$ とあらわし，

$$I = \int_S \boldsymbol{i}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

という関係式を成り立たせるベクトル量である．

電荷保存則の微分形

電流密度分布 $\boldsymbol{i}[A/m^2]$ と電荷密度分布 $\rho[C/m^3]$ により

$$\nabla \cdot \boldsymbol{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

が成り立つ．これを**電荷保存則の微分形**という．

Proof.

体積領域 V とその境界 ∂V において，電荷保存則を満たすというのは単位時間あたりの電荷 Q の減少は流出電流に等しくならなければならないため，

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \int_{\partial V} \boldsymbol{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V &= \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{i} \mathrm{d}V \\
-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V &= \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{i} \mathrm{d}V
\end{aligned}$$

となり，領域が共通であるため積分の中身は等しく，

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{i}$$

が得られる．

よって，命題は証明された．

□

1.2　磁気における法則

定義 4.

電荷に対応する素粒子のもつ性質の 1 つとして，磁石の N 極と S 極のことをを**磁極**といい，その大きさを**磁性**もしくは**磁気**という．また，その程度を**磁荷**といい，これをあらわす指標を**ウェーバ**といい単位は Wb である．磁荷は正負の値を取り，N 極を正，S 極を負と定義される．磁荷は N 極と S 極の単体で観測されず，常にペアで観測される．これを**磁気双極子**という．

磁荷間の間にも磁荷と同じようにクーロンの法則が成り立つ．

磁荷におけるクーロンの法則

2 つの素粒子が磁荷 $m_1, m_2[Wb]$ とその距離 $r[m]$ について，比例定数 $k[A^2/N]$ を用いることで力の大きさ $F[N]$ は

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

という関係式が成り立つ．このとき，磁荷の正負が異なるときは引力として力が作用し，正負が同じときは斥力として力が作用する．これを磁荷における**クーロンの法則**という．また，k は物体ん媒体によって変化し，媒体固有の定数 μ によって

$$k = \frac{1}{4\pi\mu}$$

とあらわされる．このとき，μ を**透磁率**といい，特に真空中においては μ_0 とあらわされ，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ N/A^2$ である．また，μ は媒質の等方性や線型性によって 2 階のテンソル量となるが，この場合は素粒子であるためスカラーとして扱われる．

電界の導入と同様にして，変位 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に置かれた磁荷 M, m とその位相 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ および比例定数を用いることで力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = k\frac{mM}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

とあらわされ，

$$\boldsymbol{H} = k\frac{M}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

とおけば

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{H}$$

となり，$\boldsymbol{x}_1$ に置かれた M によって放射状にベクトル場 $\boldsymbol{H}[A/m]$ が生じ，$\boldsymbol{x}_2$ に m を置いたときに $\boldsymbol{F}$ を生じると解釈することができる．このとき，$\boldsymbol{E}$ を**磁場**もしくは**磁界**といい，時間変化のない磁界を**静磁界**という．また，磁界は誘電率に依存するが，依存しない新しいベクトル場 $\boldsymbol{B}$ を

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$$

と定義する．このとき，$\boldsymbol{B}[T]$ を**磁束密度**といい，単位は**テスラー**という．また，曲面の面積 S に作用する磁束密度を**磁束**といい，これは電荷に等しい．これは素粒子で成り立つ式であり，一般の物体では透磁率は定数ではなく，電磁相互作用を考える必要があるため成り立たないとされる．

ここで，電界におけるガウスの法則と同様にして磁界におけるガウスの法則を与える．

磁界におけるガウスの法則

領域 V とその境界 ∂V を与えたとき，V 内における磁束密度分布が $\boldsymbol{B}[T]$ となるとする．このとき，

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

が成り立つ．これを磁界における**ガウスの法則**の**積分形**といい，磁荷が N 極か S 極の単体で存在することはないことを示している．

磁界におけるガウスの法則の微分形

磁束密度分布が $\boldsymbol{B}[T]$ を与えたとき，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

が成り立つ．これを磁界における**ガウスの法則**の**微分形**という．

Proof.

領域 V とその境界 ∂V では積分形よりガウスの発散定理を用いて

$$\begin{aligned}\int_{\partial V} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= 0 \\ \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B} \mathrm{d}V &= 0\end{aligned}$$

となり，どのような V を選択しても積分の中身は 0 となることから $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ が得られる．

よって，命題は証明された．

□

また，電流と磁界を関連付けるものとして，アンドレ=マリ・アンペールによって以下の法則が発見された．

アンペールの法則

静磁界 $\boldsymbol{H}[A/m]$ と任意の閉曲線 C が与えられたとき，C 上の微小曲線長さ $\mathrm{d}\boldsymbol{r}[m]$ を用いて線積分をすることで，電流 $I[A]$ について

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = I$$

が成り立つ．これを**アンペールの法則**の**積分形**という．

アンペールの法則の微分形

静磁界 $\boldsymbol{H}[A/m]$ と電流密度分布 $\boldsymbol{i}[A/m^2]$ について

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$$

が成り立つ．これを**アンペールの法則**の**微分形**という．

Proof.

曲面 S とその境界 ∂S では積分形よりストークスの定理を用いて

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{i}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{i}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

となり，領域が共通であるため積分の中身は等しく，$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$ が得られる．

よって，命題は証明された．

□

つまり，静磁界においては磁界は電流密度のベクトルポテンシャルとなる．また，電流と磁界を関連付ける同様の法則として，ジャン=バティスト・ビオとフェリックス・サバールによって以下の法則が発見された．

ビオ・サバールの法則

電流 $I[A]$ と微小長さ $\mathrm{d}\boldsymbol{s}[m]$ によって微小電流素 $I\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ を与えたとき，そこから $\boldsymbol{r}$ だけ離れた位置の静磁界 $\boldsymbol{H}[A/m]$ について，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H} = \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}}{4\pi|\boldsymbol{r}|^3}$$

が成り立つ．これを**ビオ・サバールの法則**という．

また，微小電流素の位置を $\boldsymbol{x}'[m]$ とすれば，電流密度分布 $\boldsymbol{i}[A/m^2]$ により $I\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')$ となり，$\boldsymbol{x}'$ から $\boldsymbol{r}$ だけ離れた磁界の位置を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{r}[m]$ とすれば，$\boldsymbol{i}$ の定義される空間領域 $V(\boldsymbol{x}')$ 全域で $\mathrm{d}\boldsymbol{H}$ を積分することで，

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V(\boldsymbol{x}')} \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}')$$

となる．これはアンペールの法則から導出可能である．

Proof.

磁束密度 $\boldsymbol{B}$ について，磁界におけるガウスの法則から $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ となるため，$\boldsymbol{B}$ のベクトルポテンシャルとなる $\boldsymbol{A}$ が存在して

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

である．ここで，ポアソン方程式 $\Delta\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ を考えると，ヘルムホルツの定理より $\boldsymbol{X}$ が存在するならば

$$\boldsymbol{B} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{X}) + \nabla\times(-\nabla\times\boldsymbol{X})$$

というようにスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルに分解できるが，$\boldsymbol{B}$ にはベクトルポテンシャルが存在するため $\boldsymbol{X}$ は存在し，

$$\begin{cases}\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A} = -\nabla \times \boldsymbol{X}\end{cases}$$

が得られる．

$\nabla \times \boldsymbol{A}$ の回転はアンペールの法則より

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \nabla \times \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{i}$$

および

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) =& \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla \boldsymbol{A} \\ =& \nabla(\nabla \cdot (-\nabla \times \boldsymbol{X})) - \Delta \boldsymbol{A} \\ =& -\Delta \boldsymbol{A}\end{aligned}$$

となることから

$$\Delta \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{i}$$

といった境界条件 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ におけるポアソン方程式が得られる．この解は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V(\boldsymbol{x}')} \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}')$$

となるが，これが境界条件を満たすことを確かめる．$\boldsymbol{x}$ による発散をとれば

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) =& \frac{\mu}{4\pi} \int_{V(\boldsymbol{x}')} \nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') \\ =& \frac{\mu}{4\pi} \int_{V(\boldsymbol{x}')} \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}') \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') \\ =& -\frac{\mu}{4\pi} \int_{V(\boldsymbol{x}')} \nabla_{\boldsymbol{x}'} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}') \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') \\ =& -\frac{\mu}{4\pi} \left(\int_{V(\boldsymbol{x}')} \nabla_{\boldsymbol{x}'} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') - \int_{V(\boldsymbol{x}')} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \nabla_{\boldsymbol{x}'} \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}') \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') \right)\end{aligned}$$

となり，V の境界を ∂V としてガウスの発散定理を用いることにより第 1 項は

$$\int_{V(\boldsymbol{x}')} \nabla_{\boldsymbol{x}'} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') = \int_{\partial V(\boldsymbol{x}')} \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}')$$

となるが，$\boldsymbol{i}$ は V で定義されるため，∂V では恒等的に $\boldsymbol{i} = 0$ である．また，アンペールの法則の両辺の発散をとることで $\nabla \cdot \boldsymbol{i} = 0$ となるため，第 2 項も 0 である．よって，

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$$

となる．$\boldsymbol{H}$ は $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{x}$ による回転をとって μ で割れば得られるため，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) =& \frac{1}{4\pi} \int_{V(\boldsymbol{x}')} \nabla_{\boldsymbol{x}} \times \left(\frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') \\ =& \frac{1}{4\pi} \int_{V(\boldsymbol{x}')} \nabla_{\boldsymbol{x}} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \right) \times \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}') \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') \\ =& -\frac{1}{4\pi} \int_{V(\boldsymbol{x}')} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \times \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}') \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') \\ =& \frac{1}{4\pi} \int_{V(\boldsymbol{x}')} \frac{\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}')\end{aligned}$$

となりビオ・サバールの法則がアンペールの法則を用いて導出される．

よって，命題は証明された．

□

次に，磁界の時間変化について，マイケル・ファラデーによって以下の法則が発見された．

ファラデーの電磁誘導の法則

N 巻のコイルがあり，その中を通過する磁束 $\Phi[Wb]$ と起電力 $e[V]$ について

$$e = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

が成り立つ．これは Φ の増加方向に対して右ねじ方向を正とするため，左ねじ方向に起電力が生じることを示している．これを**ファラデーの電磁誘導の法則の積分形**といい，この現象を**電磁誘導**という．

また，起電力の方向については Φ の変化を妨げる向きに e が発生するという解釈ができ，これを**レンツの法則**という．Φ の変化を妨げる方向に仮想的に Φ' が生じるとすれば，Φ' を生じさせるために電流が流れ，結果として起電力が生じると解釈することができる．この電流の方向はアンペールの法則より Φ' に対して右ねじ方向であることがわかる．

ファラデーの電磁誘導の法則の微分形

電界 $\boldsymbol{E}[V/m]$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}[T]$ について

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

が成り立つ．これを**ファラデーの電磁誘導の法則の微分形**という．

Proof.

面積領域 S とその境界 $\boldsymbol{S}$ で磁束 Φ と起電力 e を与えることで

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

となる．起電力は電位 ϕ とは逆方向であるため ∂S 上の微小電位 $\mathrm{d}\phi$ に対して

$$e = -\oint_{\partial S}\mathrm{d}\phi$$

となり，電位の定義より

$$\phi = -\oint_{\partial S}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

となることから

$$\oint_{\partial S}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

となる．これに対してストークスの定理を適用することにより

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

となり，領域が共通であるため積分の中身は等しく，

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

が得られる．

よって，命題は証明された．

□

1.3　マクスウェルの方程式

アンペールの法則は静磁界においてのみ成り立つ法則であるため，時間変化する磁界については成り立たない．これはアンペールの法則の微分形に対して発散をとったときに電荷保存則を満たさないことから明らかである．

このような時間変化を考慮したアンペールの法則をジェームズ・クラーク・マクスウェルが与えた．

アンペール・マクスウェルの法則

磁界 $\boldsymbol{H}[A/m]$ と電流密度分布 $\boldsymbol{i}[A/m^2]$ と電束密度 $\boldsymbol{D}[C]$ が与えられたとき，時間変化によって電荷保存則を満たすようにアンペールの法則を修正すると

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

となる．これを**アンペール・マクスウェルの法則**といい，特に，$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ の項を**変位電流**という．

Proof.

一般に $\nabla \times \boldsymbol{H}$ は時間変化をするため $\boldsymbol{i}$ も時間変化をし，このとき電荷密度分布 ρ について

$$\nabla \cdot \boldsymbol{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

を満たさなければならない．$\nabla \times \boldsymbol{H}$ の発散は 0 であることから適当なベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を用いて

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{A}$$

とすれば

$$\nabla \cdot \boldsymbol{i} = -\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

となる．ここで，電界におけるガウスの法則より，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

となり，$\boldsymbol{A} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ となることから，アンペールの法則が時間変化において電荷保存則を満たすように修正した式は

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

となる．また，$\boldsymbol{H}$ を静磁界とすれば $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0$ となり，アンペールの法則に等しいことがわかる．

よって，命題は証明された．

□

電磁気現象を示す式は多数存在するが，ジェームズ・クラーク・マクスウェルによって以下の方程式にまとめられた．

マクスウェルの方程式

電界 $\boldsymbol{E}[V/m]$ と電束密度 $\boldsymbol{D}[C]$ と磁界 $\boldsymbol{H}[A/m]$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}[T]$ について，電荷密度分布 $\rho[C/m^3]$ と電流密度分布 $\boldsymbol{i}[A/m^2]$ が与えられたとき，全ての電磁気現象は 4 つの方程式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \end{cases}$$

にまとめられる．これを**マクスウェルの方程式**という．

ここで，マクスウェルの方程式を変形していく．

電界 $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$ と磁界 $\boldsymbol{H}$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ について，電荷密度分布 ρ と電流密度分布 $\boldsymbol{i}$ が与えられたとき，電磁

誘導の式の両辺の回転を取ると，

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B})\\
\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\Delta\boldsymbol{E} &= -\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})\\
\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho-\Delta\boldsymbol{E} &= -\mu\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial t}-\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{D}}{\partial t^2}\\
&= -\mu\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\\
-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho-\mu\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial t}+\Delta\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} &=0\\
-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho-\mu\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial t}+\left(\Delta-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E} &=0
\end{aligned}
$$

となる．なお，μ と ε はそれぞれ透磁率と誘電率である．同様にしてアンペール・マクスウェルの法則の両辺の回転を取ると，

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) &=\nabla\times\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{D})\\
\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\Delta\boldsymbol{B} &=\mu\nabla\times\boldsymbol{i}+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{E})\\
\mu\nabla\times\boldsymbol{i}+\Delta\boldsymbol{B}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} &=0\\
\mu\nabla\times\boldsymbol{i}+\left(\Delta-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B} &=0
\end{aligned}
$$

といった 2 つの偏微分方程式

$$
\begin{cases}
-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho-\mu\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial t}+\left(\Delta-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}=0\\
\mu\nabla\times\boldsymbol{i}+\left(\Delta-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}=0
\end{cases}
$$

が得られ，境界条件

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\\
\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0
\end{cases}
$$

の下で解析することができる．

特に真空中においては以下の定義を与えることができる．

定義 5.

マクスウェルの方程式より，真空中では電位 $\boldsymbol{E}[V/m]$ と電束密度 $\boldsymbol{B}[T]$ について，境界条件

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0\\
\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0
\end{cases}
$$

の下で

$$
\begin{cases}
\left(\Delta-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}=0\\
\left(\Delta-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{B}=0
\end{cases}
$$

といった偏微分方程式が与えられる．これを電磁気における**波動方程式**といい，この解を**電磁波**という．電磁波の速度は

$$
c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}
$$

であるが，これは光の速度に等しく，光が電磁波であるとされる 1 つの理由である．

第 2 章

電磁気力

2.1 ローレンツ力

定義 6.

磁束密度 $\boldsymbol{B}[T]$ と $q[C]$ 帯電した荷電粒子が速度 $\boldsymbol{v}[m/s]$ で運動するとき，力 $\boldsymbol{F}[N]$ について

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

が成り立つ．これを**ローレンツ力**という．

しかし，一般には荷電粒子の運動により荷電粒子自身の電磁界によりクーロン力が作用するため，それを考慮しなければばならない．そこで，電界 $\boldsymbol{E}[V/m]$ を与えれば，

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

となり，これは電磁界における力について示している．

また，曲線上で一定の速度で 1 m あたり n 個の電子 $-e[C]$ が運動をするとき，静磁界および静電界が生成されるため

$$\boldsymbol{F} = -ne(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

となる．$-ne\boldsymbol{v}$ の大きさは 1 m あたりの電荷の時間変化率であることから，これは電流に等しい．ここで，電流に対して流れる方向を含める電流ベクトル $\boldsymbol{I}$ を定義すれば，

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B})$$

となる．

ここで，真空中で同じ方向に流れる距離 r の 2 本の無限長の直線平行電線に一定の平行電流 I_1, I_2 が互いに及ぼし合う力について考える．これの I_1 による I_2 での 1 m あたり磁界の大きさ H_1 は定電流より静磁界を生成するため，アンペールの法則より

$$I_1 = \oint H_1 \mathrm{d}r = 2\pi H_1 \ \Rightarrow \ H_1 = \frac{I_1}{2\pi r}$$

となり，磁束密度の大きさ B_1 は

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

となる．また，$B_1 \perp I_2$ であることから I_2 の流れる電流に作用する力 F_2 は

$$F_2 = I_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

となる．$r = 1$ および $I = I_1 = I_2$ とすれば，それぞれの及ぼし合う力 F は

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}$$

となる．ここで，$I = 1\ A$ をこの電線 $1\ m$ あたり $2 \times 10^{-7}\ N$ 及ぼし合う一定の電流であると定義することで，

$$2 \times 10^{-7} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ \Rightarrow\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

となり，透磁率が $4\pi \times 10^{-7}$ と正確に定義される．これは CGPM により採択された電流の定義であり，これにより電荷量の定義をも与えられる．

2.2　ニュートン力学との矛盾

ニュートン力学では全ての慣性系では同じ運動法則が成り立ち，時間は絶対なものである．そこで，慣性系 S_1, S_2 でそれに対応する変位 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ および S_1 から観測した S_2 の相対速度 $\boldsymbol{v}_{1,2}$ を与えたとき，S_1 における電界 $\boldsymbol{E}_1$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}_1$ による質量 m の q だけ帯電した速度 $\boldsymbol{v}_1$ で運動する荷電粒子の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{B}_1)$$

となり，S_2 における電界 $\boldsymbol{E}_2$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}_2$ で速度 $\boldsymbol{v}_2$ で運動する荷電粒子における運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{B}_2)$$

となる．これに対してガリレイ変換

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 + t\boldsymbol{v}_{1,2} \\ \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_{1,2} \end{cases}$$

を適用することで S_2 における運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{v}_{1,2} \times \boldsymbol{B}_1) = q(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{v}_{1,2} \times \boldsymbol{B}_1) + q\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{B}_1$$

となる．これにより，電界と磁束密度におけるガリレイ変換について

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{v}_{1,2} \times \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x}_1) \\ \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x}_1) \end{cases}$$

が得られる．

これは S_1 で $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{0}$ だとしても $\boldsymbol{v}_{1,2} \neq \boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{B}_1 \neq \boldsymbol{0}$ を仮定すれば，S_2 では $\boldsymbol{E}_2 \neq \boldsymbol{0}$ となることを示している．電界におけるガウスの発散定理よれば，S_1 では電荷が存在しないように観測されなくても S_2 では観測されるという直感との乖離を含む．また，$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{B}_1 \neq \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{v}_{1,2} \neq \boldsymbol{0}$ を仮定して S_1 で荷電粒子が運動しないとき，S_2 で荷電粒子は運動をするように観測されるが $\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{0}$ および $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{0}$ となるためローレンツ力が生じないはずである．これは全ての慣性系に同じ運動法則が成り立つことに矛盾する．

同様にして，電荷密度分布 ρ_1, ρ_2 および電流密度分布 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2$ を与えたとき，

$$\begin{aligned}
\rho_2 =& \varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}_2 \\
=& \varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}_1 + \varepsilon\nabla\cdot(\boldsymbol{v}_{1,2} \times \boldsymbol{B}_1) \\
=& \rho - \varepsilon\boldsymbol{v}_{1,2}\cdot(\nabla \times \boldsymbol{B}_1) \\
=& \rho - \mu\varepsilon\boldsymbol{v}_{1,2}\cdot\boldsymbol{i}_1 \\
\boldsymbol{i}_2 =& \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{B}_2 \\
=& \frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{B}_1 \\
=& \boldsymbol{i}_1
\end{aligned}$$

となり，磁界と磁束密度と同様の問題点をもっている．

また，S_1 と S_2 における空間微分の関係は $\boldsymbol{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ および $\boldsymbol{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ とすることで連鎖律より

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial t}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

となるため，S_1 におけるラプラシアン Δ_{S_1} と S_2 におけるラプラシアン Δ_{S_2} は一致する．同様にして時間による偏微分も $\boldsymbol{v}_{1,2} = (v_{x,1,2}, v_{y,1,2}, v_{z,1,2})$ とすることで連鎖律より 1 次元の場合では

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} =& \frac{\partial x_2}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial t}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t} = -v_{x,1,2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial t} \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2} =& \frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_{x,1,2}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2v_{x,1,2}\frac{\partial}{\partial x_2 \partial t}
\end{aligned}
$$

となり，これは明らかに電磁界の波動方程式が S_2 上では S_1 と同じ運動法則が成り立たず，ニュートン力学に矛盾する．

これらの矛盾を解消した理論がアルベルト・アインシュタインによる特殊相対性理論である．