物理数学 -偏微分方程式-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 11 月 4 日

目次

第 1 章

偏微分方程式

1.1 ポアソン方程式

定義 1.

$\mathbb{R}^3$ における $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ による領域 $V(\boldsymbol{x})$ で $f(\boldsymbol{x})$ が定義されているとする．このとき，$u(\boldsymbol{x})$ について

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

という偏微分方程式が与えられたとき，これを**ポアソン方程式**という．

ポアソン方程式の解法を考えたとき，ラプラシアンが存在するため変数分離等で解くのは困難である．そこで，グリーン関数を用いることでポアソン方程式の解を求める．

ここで，以下の補題を与える．

補題 1. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3$ が与えられたとき，$\boldsymbol{x}$ におけるラプラシアンとデルタ関数 $\delta(\boldsymbol{x})$ について

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$$

が与えられたとき，これを満たす $G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ は

$$G(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}$$

となる．

Proof.

$G(\boldsymbol{x})$ のフーリエ変換を $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ を用いて $\mathcal{G}(\boldsymbol{s})$ とすれば，

$$((is_1)^2 + (is_2)^2 + (is_3)^2)\mathcal{G}(\boldsymbol{s}) = -|\boldsymbol{s}|^2\mathcal{G}(\boldsymbol{s}) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\boldsymbol{x}) e^{-i(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x})} \mathrm{d}V(\boldsymbol{x}) = 1$$

となり，

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{s}) = -\frac{1}{|\boldsymbol{s}|^2}$$

が成り立つ．これを逆変換することで

$$G(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x})}}{|\boldsymbol{s}|^2} \mathrm{d}V(\boldsymbol{s})$$

とあらわされる．ここで，$\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{x} = |\boldsymbol{s}||\boldsymbol{x}|\cos\theta$ となるように

$$\begin{cases} s_1 = r\sin\theta\cos\phi \\ s_2 = r\sin\theta\sin\phi \\ s_3 = r\cos\theta \end{cases}$$

と極座標変換すればヤコビアンは $r^2 \sin\theta$ であるため，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x})}}{|\boldsymbol{s}|^2}\mathrm{d}V(\boldsymbol{s}) =& \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \frac{e^{ir|\boldsymbol{x}|\cos\theta}}{r^2} r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
=& \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_0^\pi e^{ir|\boldsymbol{x}|\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
=& -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_0^\pi \frac{1}{ir|\boldsymbol{x}|}\frac{\partial}{\partial\theta}(e^{ir|\boldsymbol{x}|\cos\theta})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\
=& -\frac{1}{(2\pi)^2|\boldsymbol{x}|}\int_0^\infty \frac{1}{ir}(e^{-ir|\boldsymbol{x}|}-e^{ir|\boldsymbol{x}|})\mathrm{d}r \\
=& \frac{1}{(2\pi)^2|\boldsymbol{x}|}\int_0^\infty 2\frac{\sin(r|\boldsymbol{x}|)}{r}\mathrm{d}r \\
=& \frac{1}{(2\pi)^2|\boldsymbol{x}|}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2} \\
=& \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}|}
\end{aligned}
$$

となり，これを $\boldsymbol{x}'$ だけ平行移動させることで

$$
G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}
$$

が得られる．

よって，命題は証明された．

□

この補題により，ポアソン方程式の解を求めることができる．

ポアソン方程式の解

$\mathbb{R}^3$ における $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ による領域 $V(\boldsymbol{x})$ で既知関数 $f(\boldsymbol{x})$ と未知関数 $u(\boldsymbol{x})$ についてポアソン方程式

$$
\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})
$$

が与えられたとき，その解は

$$
u(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{V(\boldsymbol{x}')}\frac{f(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}')
$$

となる．

Proof.

グリーン関数 $G(\boldsymbol{x})$ はデルタ関数 $\delta(\boldsymbol{x})$ によって

$$
\Delta G(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})
$$

とあらわされるが，補題より

$$
G(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}
$$

である．よって，ポアソン方程式の解は

$$
u(\boldsymbol{x}) = \int_{V(\boldsymbol{x}')} G(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') = -\frac{1}{4\pi}\int_{V(\boldsymbol{x}')}\frac{f(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|}\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}')
$$

となる．

よって，命題は証明された．

□

1.2　波動方程式