物理数学 -ベッセル関数-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2020 年 2 月 25 日
最終更新 2020 年 2 月 25 日

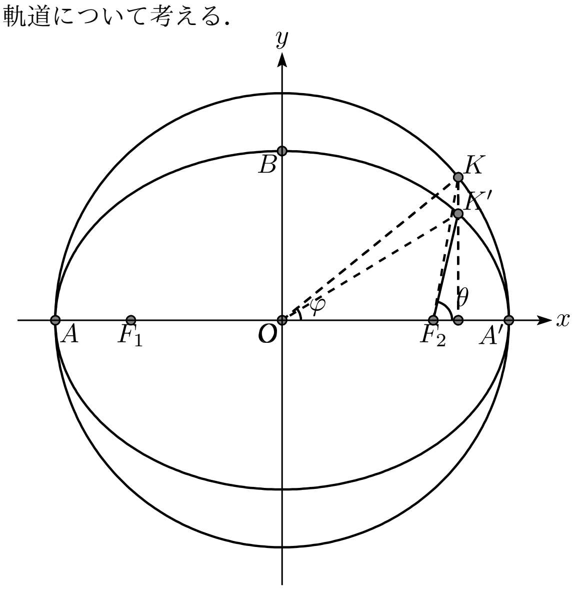
目次

第 1 章

ベッセル関数

1.1 ケプラーの方程式による導出

まずは，以下の図による惑星の軌道について考える．



これは，F_2 を太陽の位置として，惑星の現在位置が K' であり，その惑星は A を通る焦点を F_1, F_2 とする楕円軌道上を運動するときの様子である．また，O を中心として A を通る円は惑星の楕円軌道の外接円となる補助円である．これはちょうどケプラーの第一法則に基づく図である．

ここで，ケプラーの第二法則より惑星の運動で面積速度が一定であることから，それを用いるために楕円扇形 $F_2K'A'$ の面積 $S_{F_2K'A'}$ を導出する．まず，楕円扇形 $OK'A'$ の面積 $S_{OK'A'}$ は扇形 OKA' の面積 $S_{OKA'}$ に対して高さが $\frac{OB}{OA}$ となるため

$$S_{OK'A'} = \frac{OB}{OA} S_{OKA'} = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{1}{2}\varphi(OA)^2 = \frac{OB \cdot OA}{2}\varphi.$$

同様にして，三角形 $OK'F_2$ の面積 $S_{OK'F_2}$ は扇形 OKF_2 の面積 S_{OKF_2} に対して高さが $\frac{OB}{OA}$ となるため

$$S_{OK'F_2} = \frac{OB}{OA} S_{OKF_2} = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OF_2 \cdot OA}{2} \sin\varphi = \frac{OB \cdot OF_2}{2} \sin\varphi.$$

これより，$S_{F_2K'A'}$ は

$$S_{F_2K'A'} = S_{OK'A'} - S_{OK'F_2} = \frac{OB \cdot OA}{2} \left(\varphi - \frac{OF_2}{OA} \sin\theta \right)$$

となり，$\frac{OF_2}{OA}$ は惑星の楕円軌道の離心率であるため，これを ε とあらわすとすれば

$$S_{F_2K'A'} = \frac{OB \cdot OA}{2} \left(\varphi - \varepsilon \sin\varphi \right).$$

ここで，惑星の公転周期を T とすれば，楕円の面積が $\pi OA\cdot OB$ となることおよびケプラーの第二法則より

$$\frac{S_{F_2K'A'}}{t}=\frac{\pi OA\cdot OB}{T}$$
$$\varphi-\varepsilon\sin\varphi=\frac{2\pi}{T}t$$

といった関係式が得られる．$\frac{2\pi}{T}$ というのは惑星の運動の O に関する平均角速度であるため，$\frac{2\pi}{T}t$ は惑星の運動の O に関する平均運動角となる．このとき，$\frac{2\pi}{T}t$ を**平均近点角 (mean anomaly)** といい，それに対して実際の角度 φ を**離心近点角 (eccentric anomaly)** という．これより，以下の定義が与えられる．

定義 1.1

離心近点角を φ，時間 t に対する平均近点角を nt，惑星の軌道の離心率を ε としたとき，ケプラーの法則に基づく惑星の運動は

$$\varphi-\varepsilon\sin\varphi=nt$$

とあらわされる．これを**ケプラーの方程式 (Kepler's equation)** という．

ケプラーの方程式にいおいて，平均近点角を求めることは容易であるが，離心近点角については超越方程式となるため，離心近点角について解くことは難しい．そこで，

$$f(nt)=\varphi-nt=\varepsilon\sin\varphi$$

とあらわしたとき

$$f(nt+2\pi)=\varepsilon\sin(nt+2\pi+\varepsilon\sin\varphi)=\varepsilon\sin(nt+\varepsilon\sin\varphi)$$

および

$$f(-nt)=\varepsilon\sin(-nt+\varepsilon\sin\varphi)=-\varepsilon\sin(nt-\varepsilon\sin\varphi)=-\varepsilon\sin(nt+\varepsilon\sin(nt-\varepsilon\sin\varphi))$$

といった操作を繰り返すことにより $f(nt)$ は周期 2π の奇関数となることがわかる．これより，$f(nt)$ をフーリエ級数展開することで

$$\varphi=nt+f(nt)$$

のようにして離心近点角 φ を求める．$f(nt)$ が

$$f(nt)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin knt$$

とフーリエ級数展開されるとしたとき，フーリエ係数 a_k は

$$\begin{aligned}a_k=&\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon\sin\varphi\sin knt\mathrm{d}(nt)\\=&\frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{k}\left[\varepsilon\sin\varphi\cos knt\right]_0^{\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(nt)}(\sin\varphi)\cos knt\mathrm{d}(nt)\right)\\=&\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(nt)}(\varphi-nt)\cos knt\mathrm{d}(nt)\\=&\frac{2}{\pi k}\left(\int_0^{\pi}\cos knt\mathrm{d}\varphi-\int_0^{\pi}\cos knt\mathrm{d}(nt)\right)\\=&\frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi}\cos(k(\varphi-\varepsilon\sin\varphi))\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

のような積分形で与えられる．ここで，以下の定義を与える．

定義 1.2

$k\in\mathbb{N}$ および $x\in\mathbb{R}$ により

$$J_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

と与えられる関数 $J_k(x)$ を**第一種ベッセル関数 (Bessel functions of the first kind)** もしくは単に**ベッセル関数 (Bessel function)** という．

ベッセル関数を用いれば離心近点角 φ は

$$\varphi = nt + f(nt) = nt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k(k\varepsilon) \sin knt$$

のように無限級数解与えられる．

1.2　ベッセル関数の冪級数表示

ベッセル関数を積分形式で定義したが，これでは具体的な値を計算することは困難である．そこで，ベッセル関数を冪級数展開をする．まずは以下の定理を与える．

定理 1.1

$k \in \mathbb{N}$ および $x \in \mathbb{R}$ によるベッセル関数 $J_k(x)$ について

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k\varphi - x\sin\varphi)} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\varphi - k\varphi)} \mathrm{d}\varphi$$

が成り立つ．

Proof.

ベッセル関数の積分形による定義より

$$\begin{aligned}
J_k(x) =& \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(k\varphi - x\sin\varphi\right) \mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (e^{k\varphi - x\sin\varphi} + e^{-(k\varphi - x\sin\varphi)}) \mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{k\varphi - x\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi + \int_0^{\pi} e^{-(k\varphi - x\sin\varphi)} \mathrm{d}\varphi \right) \\
=& \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{k\varphi - x\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi + \int_{-\pi}^{0} e^{-(-k\varphi - x\sin(-\varphi))} \mathrm{d}\varphi \right) \\
=& \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{k\varphi - x\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi + \int_{-\pi}^{0} e^{k\varphi - x\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi \right) \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k\varphi - x\sin\varphi)} \mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\varphi - k\varphi)} \mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

定理 1.2

$k \in \mathbb{N}$ および $x \in \mathbb{R}$ によるベッセル関数 $J_k(x)$ について

$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}$$

が成り立つ．

Proof.

$e^{ix\sin\varphi}$ をテイラー展開すると

$$
\begin{aligned}
e^{ix\sin\varphi} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ix\sin\varphi)^m}{m!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ix)^m}{m!} \left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!2^m} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} e^{i\varphi l} e^{-i\varphi(m-l)} (-1)^{m-l} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (-1)^{m-l} e^{i\varphi(2l-m)}
\end{aligned}
$$

となるため，定理 1.1 に代入すると

$$
\begin{aligned}
J_k(x) =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\varphi - k\varphi)} \mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (-1)^{m-l} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(2l-m)} e^{-ik\varphi} \mathrm{d}\varphi \\
=& \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (-1)^{m-l} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(2l-m-k)} \mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}
$$

ここで，積分項について三角関数の周期性より

$$
\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(2l-m-k)} \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 2\pi & (2l-m-k=0) \\ 0 & (other) \end{cases}
$$

となることから l に関する総和は $l = \frac{m+k}{2}$ を満たす項のみが残り，

$$
\begin{aligned}
J_k(x) =& \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \binom{m}{\frac{m+k}{2}} (-1)^{m-\frac{m+k}{2}} 2\pi \\
=& \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m \binom{m}{\frac{m+k}{2}} (-1)^{\frac{m-k}{2}}.
\end{aligned}
$$

ここで，$r = \frac{m-k}{2}$ とおけば $m = 2r+k$ であり，

$$
\begin{aligned}
J_k(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+k} \binom{2r+k}{r+k} (-1)^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+k} \frac{(2r+k)!}{r!(r+k)!} (-1)^r \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(r+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+k}.
\end{aligned}
$$

よって，命題は証明された．

□

ベッセル関数の冪級数展開の式からベッセル関数に関する性質を考えることが容易になる．以下でベッセル関数に関する性質を与える．

定理 1.3

$k \in \mathbb{N}$ および $x \in \mathbb{R}$ によるベッセル関数 $J_k(x)$ について

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^k J_k(x)) = x^k J_{k-1}(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-k} J_k(x)) = -x^{-k} J_{k+1}(x)
$$

が成り立つ．また，このことは

$$J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x) = 2J_k'(x), \quad J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x}J_k(x)$$

が成り立つことと同値である．

Proof.

ベッセル関数の冪級数表示より

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^k J_k(x)) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+k} x^{2(m+k)} \\
=& \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+k} 2(m+k)x^{2(m+k)-1} \\
=& x^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+(k-1))!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+(k-1)} x^{2m+(k-1)} \\
=& x^k J_{k-1}(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-k} J_k(x)) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+k} x^{2m} \\
=& \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(m+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+k} 2mx^{2m-1} \\
=& x^{-k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m-1)!(m+k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+k-1} x^{2m+k-1} \\
=& x^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+(k+1))!}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+(k+1)} x^{2m+(k+1)} \\
=& -x^k J_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

が得られる．この関係式を用いることで

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^k J_k(x)) = kx^{k-1}J_k(x) + x^k J_k'(x) = x^k J_{k-1}(x) \ \Rightarrow\ \frac{k}{x}J_k(x) + J_k'(x) = J_{k-1}(x)$$

および

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-k} J_k(x)) = -kx^{-k-1}J_k(x) + x^{-k} J_k'(x) = -x^{-k} J_{k+1}(x) \ \Rightarrow\ -\frac{k}{x}J_k(x) + J_k'(x) = -J_{k+1}(x)$$

が成り立つため，これらを連立することにより

$$J_{k-1}(x) - J_{k+1}(x) = 2J_k'(x), \quad J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x}J_k(x)$$

が得られる．逆に，これらの関係式を仮定したときは逆の操作をすることにより

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^k J_k(x)) = x^k J_{k-1}(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-k} J_k(x)) = -x^{-k} J_{k+1}(x)$$

が直ちに得られる．

よって，命題は証明された．

□

1.3　ベッセル関数の一般化

ベッセル関数の微分における関係式より，微分方程式による一般化を考える．定理 1.3 より $k \in \mathbb{N}$ および $x \in \mathbb{R}$ によるベッセル関数 $J_k(x)$ について

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^k J_k(x)) = x^k J_{k-1}(x), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-k+1} J_{k-1}(x)) = -x^{-k+1} J_k(x)$$

となるため $J_{k-1}(x)$ を除去すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-2k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^kJ_k(x))\right)=-x^{-k+1}J_k(x).$$

ここで，左辺を整理すれば

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-2k+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^kJ_k(x))\right)=&x^{-2k+1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^kJ_k(x))+(-2k+1)x^{-2k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^kJ_k(x))\\=&x^{-2k+1}(k(k-1)x^{k-2}J_k(x)+2kx^{k-1}J_k'(x)+x^kJ_k''(x))+(-2k+1)x^{-2k}(kx^{k-1}J_k(x)+x^kJ_k'(x))\\=&k(k-1)x^{-k-1}J_k(x)+2kx^{-k}J_k'(x)+x^{-k+1}J_k''(x)+(-2k+1)(kx^{-k-1}J_k(x)+x^{-k}J_k'(x))\\=&x^{-k}(xJ_k''(x)+J_k'(x)-x^{-1}k^2J_k(x))\end{aligned}$$

となるため，これを代入することにより

$$\begin{aligned}x^{-k}(xJ_k''(x)+J_k'(x)-x^{-1}k^2J_k(x))=&-x^{-k+1}J_k(x)\\x^2J_k''(x)+xJ_k'(x)-k^2J_k(x)=&-x^2J_k(x)\\x^2J_k''(x)+xJ_k'(x)+(x^2-k^2)J_k(x)=&0.\end{aligned}$$

つまり，$y=f(x)$ として

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-k^2)y=0$$

の線型常微分方程式を満たす特殊解の 1 つがベッセル関数 $J_k(x)$ となる．ベッセル関数の一般化を考えるために，以下の定義を与える．

定義 1.3

$z\in\mathbb{C}$ による複素関数 $w=f(z)$ が定数 $\nu\in\mathbb{C}$ を用いた線型常微分方程式

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+(z^2-\nu^2)w=0$$

を**ベッセルの微分方程式**という．

ベッセル関数自体が一般化として級数で定義することが妥当であるため，ベッセルの微分方程式の級数解を求める．このとき，ベッセル関数の冪級数展開に準拠して係数 $c_0,c_1,\cdots\in\mathbb{C}(c_0\neq 0)$ を用いて

$$f(z)=z^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$$

という形式となると仮定すれば，$c_{-1}=c_{-2}=0$ として

$$\begin{aligned}(z^2-\nu^2)w=&z^\rho\sum_{k=0}^{\infty}(c_{k-2}-\nu^2c_k)z^k\\z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=&z^\rho\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)c_kz^k\\z^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}=&z^\rho\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)c_kz^k.\end{aligned}$$

これをベッセルの微分方程式に代入して $z^{\rho+k}$ による係数比較を行うと

$$\begin{aligned}(c_{k-2}-\nu^2c_k)+(k+\rho)c_k+(k+\rho)(k+\rho-1)c_k=&0\\c_{k-2}-\nu^2c_k+(k+\rho)c_k+(k+\rho)^2c_k-(k+\rho)c_k=&0\\((k+\rho)^2-\nu^2)c_k=&-c_{k-2}\end{aligned}$$

といった関係式が得られるため，

$$\begin{cases} c_k = 0 & (k=-1,-2) \\ c_k \neq 0 & (k=0) \\ ((k+\rho)^2 - \nu^2)c_k = -c_{k-2} & (other). \end{cases}$$

これより，逐次係数 $c_0, c_1, \cdots$ を求めることを考えると，$c_0 \neq 0$ より $k=0$ で

$$\rho^2 - \nu^2 = 0 \;\Rightarrow\; \rho = \pm\nu$$

であり，$\rho = \nu$ の場合を考えれば $k \neq 0$ で $(k+\nu)^2 - \nu^2 \neq 0$ となるため，$c_{2k+1} = 0$ となることがわかる．以後，同様にして $\rho = \nu$ の場合を考える．$k = 2m (m \in \mathbb{Z})$ を満たすとき

$$\begin{aligned} c_{2m} =& \frac{-1}{(2m+\nu)^2 - \nu^2} c_{2(m-1)} \\ =& \frac{-1}{(2m+\nu)^2-\nu^2} \cdot \frac{-1}{(2(m-1)+\nu)^2-\nu^2} \cdots \frac{-1}{(2+\nu)^2-\nu^2} c_0 \\ =& \frac{-1}{(2m)^2+4m\nu} \cdot \frac{-1}{(2(m-1))^2+4(m-1)\nu} \cdots \frac{-1}{2^2+4\nu^2} c_0 \\ =& \frac{-1}{2^2 m(m+\nu)} \cdot \frac{-1}{2^2(m-1)(m-1+\nu)} \cdots \frac{-1}{2^2(1+\nu)} c_0 \\ =& \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(m+\nu)(m-1+\nu)\cdots(1+\nu)} c_0 \end{aligned}$$

となるため，ガンマ関数を用いて c_0 を

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

のように選べば

$$c_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{\nu+2m} m! \Gamma(\nu+1+m)}$$

となり，$\rho = -\mu$ の場合は c_{2m} の ν に対して $-\nu$ とすることで，ベッセルの微分方程式の特殊解

$$f_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+1+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}, \quad f_{-\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-\nu+1+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2m}$$

が得られる．$n \in \mathbb{Z}$ に対して $\nu \to n$ という操作をしたとき，ガンマ関数の極により

$$\lim_{\nu \to n} \frac{1}{\Gamma(-\nu+1+m)} = 0 \quad (-\nu+1+m \leq 0)$$

となるため，$f_{-n}(z)$ の冪級数の $-n+1+m \leq 0$ を満たす係数は 0 となり

$$\begin{aligned} f_{-n}(z) =& \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+1+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\ =& \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\Gamma(-n+1+m+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m+2n} \\ =& (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1+n)m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\ =& (-1)^n f_n(z). \end{aligned}$$

また，この級数の収束性を考えると，ν が負の実数かつ $x \to 0$ としたとき $m=0$ のとき明らかに発散する．それ以外の場合は

$$\frac{c_{2m+2}}{c_{2m}} = -\frac{m!\Gamma(\nu+1+m)}{(m+1)!\Gamma(\nu+1+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 = -\frac{1}{(m+1)(\nu+1+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^2$$

より

$$\lim_{m \to \infty} \frac{c_{2m+2}}{c_{2m}} = 0$$

となるため，ダランベールの収束判定法より 0 を除く複素数平面全域 $\mathbb{C}^*$ で絶対収束することがわかる．これより，以下の定義および定理が与えられる．

定義 1.4

$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ により

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+1+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}$$

により与えられる関数 $J_\nu(z)$ を拡張された**ベッセル関数**という．

定理 1.4

$n \in \mathbb{Z}$ および $z \in \mathbb{C}$ によるベッセル関数 $J_n(z)$ について

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

が成り立つ．

Proof.

導出より明らかである．

□

定理 1.5

$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ によるベッセル関数 $J_\nu(z)$ は 0 を除く複素数平面全域 $\mathbb{C}^*$ で正則である．また，ν が整数もしくは非負でないとき $z \to 0$ で $\lceil |\mathrm{Re}\,\nu| \rceil$ 次の極をとる．

Proof.

正則性については導出より明らかである．極については $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ として

$$z^\nu J_{-\nu}(z) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+1+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

は複素数平面全域で正則となるため，$z \to 0$ で $\lceil \mathrm{Re}\,\nu \rceil$ 次の極となる．

よって，命題は証明された．

□

また，拡張されたベッセル関数は定理 1.3 を満たすことも明らかである．

次に，ベッセルの微分方程式の 2 つの解 $f_\nu(z) = J_\nu(z), f_{-\nu}(z) = J_{-\nu}(z)$ の線型独立性を評価するためにロンスキアン

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{-\nu}(z) \\ J'_\nu(z) & J'_{-\nu}(z) \end{vmatrix}$$

を計算する．これを微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) =& J'_\nu(z)J'_{-\nu}(z) + J_\nu(z)J''_{-\nu}(z) - J'_{-\nu}(z)J'_\nu(z) - J_{-\nu}(z)J''_\nu(z) \\
=& J_\nu(z)\left(-\frac{1}{z}J'_{-\nu}(z) - \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)J_{-\nu}(z)\right) - J_{-\nu}(z)\left(-\frac{1}{z}J'_\nu(z) - \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)J_\nu(z)\right) \\
=& -\frac{1}{z}(J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z)) \\
=& -\frac{1}{z}W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z))
\end{aligned}$$

のような微分方程式が得られるため，これを解くと，定数 $C \in \mathbb{C}$ を用いて

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \frac{C}{z}$$

の形式となることがわかる．つまり，$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z))$ は $\frac{C}{z}$ の係数のみが残る．これより，

$$\begin{aligned}
J_\nu(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + O(z^2)\right) \\
J'_\nu(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}\left(\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)} + O(z^2)\right) + \left(\frac{z}{2}\right)^\nu O(z^1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} + O(z^2)\right)
\end{aligned}$$

とすることでガンマ関数の相反公式を用いれば

$$\begin{aligned}
W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) &= J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\frac{1}{\Gamma(\nu)} + O(z^2)\right) \\
&= z^{-1}\left(\frac{\sin\pi(\nu+1)}{\pi} - \frac{\sin\pi\nu}{\pi}\right) \\
&= -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi z}.
\end{aligned}$$

つまり，$\nu \notin \mathbb{Z}$ であるときは $W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) \neq 0$ となるため $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は線型独立である．$\nu \in \mathbb{Z}$ の場合については定理 1.4 より $J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は線型従属であることがわかる．

$\nu \in \mathbb{Z}$ の場合において，$J_\nu(z)$ とは別の $J_\nu(z)$ とは線型独立な解 $Y_\nu(z)$ が存在するため，それを導出する．このとき，$Y_\nu(z)$ を $J_\nu(z)$ および $J_{-\nu}(z)$ の線型結合により与えれば $Y_\nu(z)$ はベッセルの微分方程式を満たすため，$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z))$ の場合と比較して $\sin\pi\nu$ を除去できるように $Y_\nu(z)$ を構成する．仮定より，$Y_\nu(z)$ は $J_\nu(z)$ および $J_{-\nu}(z)$ の線型結合であらわすことから定数 $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ を用いて

$$Y_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z)$$

とあらわされる．これより，

$$\begin{aligned}
W(J_\nu(z), Y_\nu(z)) &= J_\nu(z)Y'_\nu(z) - Y_\nu(z)J'_\nu(z) \\
&= J_\nu(z)(C_1 J'_\nu(z) + C_2 J'_{-\nu}(z)) - (C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z))J'_\nu(z) \\
&= C_1(J_\nu(z)J'_\nu(z) - J_\nu(z)J'_\nu(z)) + C_2(J_\nu(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_\nu(z)) \\
&= C_2 W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) \\
W(J_{-\nu}(z), Y_\nu(z)) &= J_{-\nu}(z)Y'_\nu(z) - Y_\nu(z)J'_{-\nu}(z) \\
&= J_{-\nu}(z)(C_1 J'_\nu(z) + C_2 J'_{-\nu}(z)) - (C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z))J'_{-\nu}(z) \\
&= C_1(J_{-\nu}(z)J'_\nu(z) - J_\nu(z)J'_{-\nu}(z)) + C_2(J_{-\nu}(z)J'_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(z)J'_{-\nu}(z)) \\
&= -C_1 W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z))
\end{aligned}$$

となるため

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sin\pi\nu}$$

とすればいいと考えられるが，

$$\frac{J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\pi\nu}$$

は $\nu \in \mathbb{Z}$ で $\sin\pi\nu$ が 0 となることから発散するため，$\nu \in \mathbb{Z}$ で極値をもつように C_1 および C_2 を選ぶ必要がある．なお，$Y_\nu(z)$ は $J_\nu(z)$ と線型独立となるように選択する関数であるため，

$$W(J_\nu(z), Y_\nu(z)) = C_2 W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \frac{2}{\pi z} \ \Rightarrow\ C_2 = -\frac{1}{\sin\pi\nu}$$

のように選択してもいい．C_1 については $\nu \in \mathbb{Z}$ で極値をもつように定数 C'_1 を用いて

$$W(J_{-\nu}(z), Y_\nu(z)) = -C_1 W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) \ \Rightarrow\ C_1 = \frac{C'_1}{\sin\pi\nu}$$

と選択するとする．ここで，ロピタルの定理を適用することを考えれば

$$Y_\nu(z) = \frac{C_1' J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu}$$

の分子が $n \in \mathbb{Z}(n \geq 0)$ として $\nu \to n$ で 0 となればいい．定理 1.4 より

$$\lim_{\nu \to n} (C_1' J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)) = C_1' J_n(z) - (-1)^n J_n(z) = (C_1' - (-1)^n) J_n(z)$$

となるため，$\nu \to n$ で $C_1' = (-1)^n$ となる適当な C_1' は

$$C_1' = \cos \pi\nu$$

である．これより，$\nu \to n$ として極限を評価する．ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \to n} Y_\nu(z) &= \lim_{\nu \to n} \frac{\cos \pi\nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu} \\
&= \lim_{\nu \to n} \frac{1}{\pi \cos \pi\nu} \left(\cos \pi\nu \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - \pi \sin \pi\nu J_\nu(z) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \left((-1)^n \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) \right|_{\nu=n} - \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right|_{\nu=n} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) \right|_{\nu=n} - (-1)^n \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right|_{\nu=n} \right).
\end{aligned}$$

ここで，$J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ の ν による偏導関数を考える．まず，$J_\nu(z)$ および $J_{-\nu}(z)$ の偏導関数について

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) =& J_\nu(z) \log \frac{z}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu + 1 + m)} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2m+\nu} \\
=& J_\nu(z) \log \frac{z}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{\psi(\nu + 1 + m)}{\Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m+\nu} \\
\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) =& - J_{-\nu}(z) \log \frac{z}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{\psi(\nu + 1 + m)}{\Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m+\nu}.
\end{aligned}$$

ここで，$\psi(\nu + 1 + m)$ というのはディガンマ関数を示す．これより，それぞれの偏導関数について $\nu \to n$ をとると

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \to n} \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) =& J_n(z) \log \frac{z}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{\psi(n + 1 + m)}{\Gamma(n + 1 + m)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m+n} \\
\lim_{\nu \to n} \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) =& - (-1)^n J_n(z) \log \frac{z}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{\psi(-n + 1 + m)}{\Gamma(-n + 1 + m)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m-n} \\
=& - (-1)^n J_n(z) \log \frac{z}{2} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{\psi(-n + 1 + m)}{\Gamma(-n + 1 + m)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m-n} \\
&+ \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{\psi(-n + 1 + m)}{\Gamma(-n + 1 + m)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m-n} \\
=& - (-1)^n J_n(z) \log \frac{z}{2} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{\psi(-n + 1 + m)}{\Gamma(-n + 1 + m)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m-n} \\
&+ (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+n)!} \cdot \frac{\psi(1 + m)}{\Gamma(1 + m)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m+n}
\end{aligned}$$

のようになる．$J_{-\nu}(z)$ については $\psi(-n + 1 + m)$ が $m < n$ で発散するため総和を分割している．ガンマ関数の相反

公式およびディガンマ関数の相反公式より $k \in \mathbb{Z}(x \geq 0)$ で

$$\begin{aligned}
\psi(1-k) =& \psi(k) + \pi \cot \pi k \\
\frac{\psi(1-k)}{\Gamma(1-k)} =& \frac{\psi(k) + \pi \cot \pi k}{\Gamma(1-k)} \\
=& \frac{\psi(k) + \pi \cot \pi k}{\pi} \Gamma(k) \sin \pi k \\
=& \frac{\psi(k)\Gamma(k)}{\pi} \sin \pi k + \Gamma(k) \cos \pi k \\
=& (k-1)!(-1)^k
\end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \to n} \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) =& -(-1)^n J_n(z) \log \frac{z}{2} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!} (n-m-1)!(-1)^{n-m} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \\
&+ (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+n)!} \cdot \frac{\psi(1+m)}{\Gamma(1+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
=& -(-1)^n J_n(z) \log \frac{z}{2} + (-1)^n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \\
&+ (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+n)!} \cdot \frac{\psi(1+m)}{\Gamma(1+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}.
\end{aligned}$$

以上より，ガンマ関数を階乗に置き換えて $Y_\nu(z)$ の $\nu \to n$ の極限をとれば

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \to n} Y_\nu(z) =& \frac{1}{\pi} J_n(z) \log \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \frac{\psi(n+1+m)}{(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
&+ \frac{1}{\pi} J_n(z) \log \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+n)!} \cdot \frac{\psi(1+m)}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
=& \frac{2}{\pi} J_n(z) \log \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} (\psi(n+1+m) + \psi(1+m)) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}.
\end{aligned}$$

これより以下の定義および定理が与えられる．

定義 1.5

$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ によりベッセル関数 $J_\nu(z)$ を用いて

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos \pi\nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu}$$

により与えられる関数 $Y_\nu(z)$ を**第二種ベッセル関数 (Bessel functions of the second kind)** もしくは**ノイマン関数 (Neumann function)** という．ノイマン関数という意の場合には $N_\nu(z)$ とあらわすこともある．

$\nu \in \mathbb{Z}$ の場合は $n \in \mathbb{Z}$ で $\nu \to n$ の極限として $Y_\nu(z)$ は定義され，$n \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \to n} Y_\nu(z) =& \frac{2}{\pi} J_n(z) \log \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} (\psi(n+1+m) + \psi(1+m)) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
&- \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}.
\end{aligned}$$

定理 1.6

$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ によるベッセル関数 $J_\nu(z)$ と第二種ベッセル関数 $Y_\nu(z)$ は線型独立である．

Proof.

導出より明らか．

□

定理 1.7

$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ による第二種ベッセル関数 $Y_\nu(z)$ について

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\nu Y_\nu(z)) = z^\nu Y_{\nu-1}(z), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z^{-\nu} Y_\nu(z)) = -z^{-\nu} Y_{\nu+1}(z)$$

が成り立つ．

Proof.

定理 1.3 より明らか．

□

また，第二種ベッセル関数の導出で与えたベッセル関数の偏微分について以下の補題が与えられる．

補題 1.1　$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ によるベッセル関数 $Y_\nu(z)$ について，適当な $\nu' \in \mathbb{C}$ で

$$\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) = -\lim_{\nu' \to -\nu} \frac{\partial}{\partial \nu'} J_{\nu'}(z).$$

Proof.

導出より明らか．

□

これより，以下の定理が与えられる．

定理 1.8

$n \in \mathbb{Z}$ および $z \in \mathbb{C}$ による第二種ベッセル関数 $Y_n(z)$ について

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z)$$

が成り立つ．

Proof.

補題 1.1 より

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu \to -n} Y_\nu(z) &= \lim_{\nu \to -n} \frac{\cos \pi\nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu} \\
&= \lim_{\nu \to -n} \frac{1}{\pi \cos \pi\nu} \left(\cos \pi\nu \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - \pi \sin \pi\nu J_\nu(z) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \left((-1)^n \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) \right|_{\nu=-n} - \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right|_{\nu=-n} \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \left(-(-1)^n \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right|_{\nu=n} + \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) \right|_{\nu=n} \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi} \left(\left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) \right|_{\nu=n} - (-1)^n \left. \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right|_{\nu=n} \right) \\
&= (-1)^n \lim_{\nu \to n} Y_\nu(z).
\end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

ベッセルの微分方程式の定理 1.6 により明らかな線型独立な複素数解を与える関数として以下の定義を与えることができる．

定義 1.6

$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ によりベッセル関数 $J_\nu(z)$ と第二種ベッセル関数 $Y_\nu(z)$ を用いて

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z)$$

により与えられる関数 $H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)$ を**ハンケル関数 (Hankel function)** という．

定理 1.9

$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ によるハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)$ について

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\nu H_\nu^{(1)}(z)) &= z^\nu H_{\nu-1}^{(1)}(z), \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z^{-\nu} H_\nu^{(1)}(z)) &= -z^{-\nu} H_{\nu+1}^{(1)}(z) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\nu H_\nu^{(2)}(z)) &= z^\nu H_{\nu-1}^{(2)}(z), \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z^{-\nu} H_\nu^{(2)}(z)) &= -z^{-\nu} H_{\nu+1}^{(2)}(z)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

Proof.

定理 1.3 および定理 1.7 より明らか．

□

ハンケル関数は第二種ベッセル関数の定義より第一種ベッセル関数のみを用いて表現が可能である．そこで，それを示す．

補題 1.2　$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ によりベッセル関数 $J_\nu(z)$ とハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)$ を用いて

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\pi\nu} J_\nu(z)}{i \sin \nu\pi}, \quad H_\nu^{(2)}(z) = \frac{e^{i\pi\nu} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \nu\pi}$$

Proof.

ハンケル関数の定義より

$$\begin{aligned}
H_\nu^{(1)}(z) =& J_\nu(z) + i\frac{\cos\nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \\
=& i\frac{-i\sin\nu\pi J_\nu(z) + \cos\nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \\
=& i\frac{e^{-i\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \\
=& \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\pi\nu} J_\nu(z)}{i\sin\nu\pi} \\
H_\nu^{(2)}(z) =& J_\nu(z) - i\frac{\cos\nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \\
=& i\frac{-i\sin\nu\pi J_\nu(z) - \cos\nu\pi J_\nu(z) + J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \\
=& i\frac{-e^{i\nu\pi} J_\nu(z) + J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \\
=& \frac{e^{i\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{i\sin\nu\pi}.
\end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

1.4　変形ベッセル関数

まずはベッセルの微分方程式の亜種を定義する．

定義 1.7

$z \in \mathbb{C}$ による複素関数 $w = f(z)$ が定数 $\nu \in \mathbb{C}$ を用いた線型常微分方程式

$$z^2 \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - (z^2 + \nu^2)w = 0$$

を変形されたベッセルの微分方程式という．

上記と同条件による変形されたベッセルの微分方程式について，$z \mapsto iz$ とすることで

$$\begin{aligned}(iz)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(iz)^2} f(iz) + (iz)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}(iz)} - ((iz)^2 + \nu^2)f(iz) =& 0\\ z^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} f(iz) + z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - (-z^2 + \nu^2)f(iz) =& 0\\ z^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} f(iz) + z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + (z^2 - \nu^2)f(iz) =& 0\end{aligned}$$

となり，ベッセルの微分方程式に帰着する．つまり，この微分方程式の特殊解は第ベッセル関数を用いた場合は

$$J_\nu(iz) = i^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}$$

とあらわされる．ここで，$z \in \mathbb{R}$ としたとき $J_\nu(iz)$ が実数の範囲に定義域をもつように

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}$$

と関数を与えるとする．なお，z が複素数の場合は z^ν の多価性より中辺と右辺は等しくない．その場合については

$$\begin{aligned}(iz)^\nu =& e^{\nu \log iz} = e^{\nu(\log|z| + \arg iz)}\\ i^\nu z^\nu =& e^{\nu \log i} e^{\nu \log z} = e^{\nu(\log|z| + \arg i + \arg z)}\end{aligned}$$

より $\arg z$ および $\arg iz$ を $(-\pi, \pi]$ なるように

$$\arg iz = \arg i + \arg z$$

と分解をすればいい．つまり，

$$\begin{cases} I_\nu(z) = e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} J_\nu(e^{i\frac{\pi}{2}} z) & \left(-\pi < \arg z \leq \dfrac{\pi}{2}\right)\\ I_\nu(z) = e^{i\frac{3\pi\nu}{2}} J_\nu(e^{-i\frac{3\pi}{2}} z) & \left(-\dfrac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi\right)\end{cases}$$

とすればいい．以後，多価性については無視して考えていく．

$I_\nu(z)$ と $I_{-\nu}(z)$ の線型独立性については

$$I'_\nu(z) = i^{-\nu+1} J'_\nu(iz)$$

となることからロンスキアンは

$$\begin{aligned}W(I_\nu(z), I_{-\nu}(z)) =& I_\nu(z)I'_{-\nu}(z) - I_{-\nu}(z)I'_\nu(z)\\ =& i(J_\nu(iz)J'_{-\nu}(iz) - J_{-\nu}(iz)J'_\nu(iz))\\ =& iW(J_\nu(iz), J_{-\nu}(iz))\\ =& -\frac{2\sin \pi\nu}{\pi z}\end{aligned}$$

となり，$\nu \notin \mathbb{Z}$ であるときは $I_\nu(z)$ と $I_{-\nu}(z)$ は線型独立である．$\nu \in \mathbb{Z}$ のときは

$$I_{-\nu}(z) = i^{\nu} J_{-\nu}(iz) = (-i)^{\nu} J_\nu(iz) = i^{-\nu} J_\nu(iz) = I_\nu(z)$$

となるため線型従属である．ここで，第二種ベッセル関数の導出と同様にして $I_\nu(z)$ と線型独立な $K_\nu(z)$ を導出する．定数 $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ により

$$K_\nu(z) = C_1 I_\nu(z) + C_2 I_{-\nu}(z)$$

とあらわすとすれば

$$W(I_\nu(z), K_\nu(z)) = C_2 W(I_\nu(z), I_{-\nu}(z)), \quad W(I_{-\nu}(z), K_\nu(z)) = -C_1 W(I_\nu(z), I_{-\nu}(z))$$

となるため，

$$-C_1 = C_2 = \frac{\pi}{2\sin \pi\nu}$$

のように適当にロンスキアンが非零となるように係数を選択すれば

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi\nu}$$

が得られる．ここで，この表現と補題 1.2 によるハンケル関数との関係を比較すると

$$K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{2}\nu} J_{-\nu}(iz) - e^{-i\frac{\pi}{2}\nu} J_\nu(iz)}{i \sin \pi\nu}$$

より

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz), \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{-\nu+1} H_{-\nu}^{(2)}(iz)$$

といった関係式が得られる．これより，$K_\nu(z)$ の $n \in \mathbb{Z}$ で $\nu \to n$ としとたときの極限は

$$\begin{aligned}
\lim_{\nu\to n} K_\nu(z) =& \lim_{\nu \to n} \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) \\
=& \frac{\pi}{2} \lim_{\nu\to n} i^{n+1} (J_\nu(iz) + iY_\nu(iz)) \\
=& \frac{\pi}{2} i^{n+1} J_n(iz) + i^{n+2} J_n(iz) \log\frac{iz}{2} - \frac{i^{n+2}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} (\psi(n+1+m) + \psi(1+m)) \left(\frac{iz}{2}\right)^{2m+n} \\
& - \frac{i^{n+2}}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{iz}{2}\right)^{2m-n} \\
=& \left(i\frac{\pi}{2} - \log i - \log\frac{z}{2}\right) i^n J_n(iz) - \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} (\psi(n+1+m) + \psi(1+m)) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \\
=& \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} - \log\frac{z}{2} \cdot (-1)^n I_n(z) \\
& - \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} (\psi(n+1+m) + \psi(1+m)) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
=& \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} - \log\frac{z}{2} \cdot (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
& - \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} (\psi(n+1+m) + \psi(1+m)) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \\
=& \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \\
& + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} \left(2\log\frac{z}{2} - \psi(n+1+m) - \psi(1+m)\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}.
\end{aligned}$$

以上より，以下の定義および定理が与えられる．

定義 1.8

$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ により

$$I_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+1+m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}$$

と与えられる関数 $I_\nu(z)$ を**第一種変形ベッセル関数 (modified Bessel function of the first kind)** という．第一種ベッセル関数 $J_\nu(z)$ の間には $\arg z$ および $\arg iz$ を $(-\pi, \pi]$ とすることで

$$\begin{cases} I_\nu(z) = e^{-i\frac{\pi\nu}{2}} J_\nu(e^{i\frac{\pi}{2}} z) & \left(-\pi < \arg z \le \dfrac{\pi}{2}\right) \\ I_\nu(z) = e^{i\frac{3\pi\nu}{2}} J_\nu(e^{-i\frac{3\pi}{2}} z) & \left(-\dfrac{\pi}{2} < \arg z \le \pi\right) \end{cases}$$

とあらわされ，$z \in \mathbb{R}$ のときは

$$I_\nu(z) = i^{-\nu} J_\nu(iz)$$

とあらわすことができる．また，

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \pi\nu} = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{\pi}{2} i^{-\nu+1} H_{-\nu}^{(2)}(iz)$$

と与えられる関数 $K_\nu(z)$ を**第二種変形ベッセル関数 (modified Bessel function of the second kind)** という．$\nu \in \mathbb{Z}$ の場合は $n \in \mathbb{Z}$ で $\nu \to n$ の極限として $K_\nu(z)$ は定義され，$n \ge 0$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \to n} K_\nu(z) =& \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \\ &+ \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} \left(2 \log \frac{z}{2} - \psi(n+1+m) - \psi(1+m)\right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n}. \end{aligned}$$

定理 1.10

$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ による第一種変形ベッセル関数 $I_\nu(z)$ と変形第二種ベッセル関数 $K_\nu(z)$ は線型独立である．

Proof.

導出より明らか．

□

定理 1.11

$\nu \in \mathbb{C}$ および $z \in \mathbb{C}$ による第一種変形ベッセル関数 $I_\nu(z)$ と変形第二種ベッセル関数 $K_\nu(z)$ について

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\nu I_\nu(z)) = z^\nu I_{\nu-1}(z), &\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z^{-\nu} I_\nu(z)) = -z^{-\nu} I_{\nu+1}(z) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\nu K_\nu(z)) = -z^\nu K_{\nu-1}(z), &\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z^{-\nu} K_\nu(z)) = -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z) \end{aligned}$$

が成り立つ．

Proof.

$I_\nu(z)$ については定理 1.3 より明らか．$K_\nu(z)$ については

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^\nu K_\nu(z)) =& z^\nu \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-(\nu-1)}(z) - I_{\nu-1}(z)}{\sin \pi\nu} = -z^\nu \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-(\nu-1)}(z) - I_{\nu-1}(z)}{\sin \pi(\nu-1)} = -z^\nu K_{\nu-1}(z) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z^{-\nu} K_\nu(z)) =& z^{-\nu} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-(\nu+1)}(z) - I_{\nu+1}(z)}{\sin \pi\nu} = -z^{-\nu} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{I_{-(\nu+1)}(z) - I_{\nu+1}(z)}{\sin \pi(\nu+1)} = -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z) \end{aligned}$$

となるため成り立つ．

よって，命題は証明された．

□

1.5　ヘルムホルツの方程式との関係

$\psi \in \mathbb{R}^3$ と定数 $k \in \mathbb{R}$ によるヘルムホルツの方程式

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$$

について考える．まずは，ψ を

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

のような二次元極座標座標標座標系で

$$\psi(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)$$

と変数分離をして考える．これをもとの微分方程式に代入して計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)\Theta + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}R + k^2R\Theta =&0 \\ r\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} + \frac{\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}}{\Theta} + r^2k^2 =&0 \end{aligned}$$

となり，θ と r の依存を分離することができ，

$$r\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} + r^2k^2 = -\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}}{\Theta} = \lambda^2 = constant$$

とおくことができる．特に R について

$$\begin{aligned} r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + (r^2k^2 - \lambda^2)R =&0 \\ r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + (r^2k^2 - \lambda^2)R =&0. \end{aligned}$$

ここで，$kr = x$ と変数変換をすれば

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

となるため

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \lambda^2)R = 0.$$

これはちょうどベッセルの微分方程式と等しいため，特殊解として $R(r) = J_\lambda(kr)$ とあらわすことができる．

同様にして，ψ を三次元極座標系

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

として

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

と変数分離したときの $R(r)$ について考える．これをもとの微分方程式に代入して計算すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)\Theta\Phi + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)R\Phi + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}R\Theta + k^2R\Theta\Phi =&0 \\ r^2\sin^2\theta\frac{\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} + \sin\theta\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}}{\Theta} + k^2r^2\sin^2\theta = -\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}}{\Phi}& \end{aligned}$$

となり，左辺は ϕ に依存しないため

$$\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}}{\Phi} = -\mu^2 = constant$$

とおくことができる．これより，

$$\begin{aligned} r^2\sin^2\theta\frac{\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} + \sin\theta\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}}{\Theta} + k^2r^2\sin^2\theta =& \mu^2 \\ r^2\frac{\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} + k^2r^2 =& \frac{\mu^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}}{\Theta} \end{aligned}$$

となり，r と θ の依存を分離することができ，

$$r^2\frac{\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} + k^2r^2 = \frac{\mu^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}}{\Theta} = \lambda = constant$$

とおくことにより R は

$$\begin{aligned} r^2\frac{\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} + k^2r^2 =& \lambda \\ r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + (k^2r^2-\lambda)R =& 0. \end{aligned}$$

ここで，$kr = x$ と変数変換をすれば

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + (x^2-\lambda)R = 0$$

のようなベッセルの微分方程式と形が似ている微分方程式が得られる．ここで，天下り的ではあるが，

$$\tilde{R}(x) = x^{\frac{1}{2}}R(x)$$

として

$$\begin{aligned} x^2\left(\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\tilde{R} - 2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}x} + x^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2\tilde{R}}{\mathrm{d}x^2}\right) + 2x\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\tilde{R} + x^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}x}\right) + (x^2-\lambda)x^{-\frac{1}{2}}\tilde{R} =& 0 \\ x^2\left(\frac{3}{4}x^{-2}\tilde{R} - x^{-1}\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\tilde{R}}{\mathrm{d}x^2}\right) + 2x\left(-\frac{1}{2}x^{-1}\tilde{R} + \frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}x}\right) + (x^2-\lambda)\tilde{R} =& 0 \\ x^2\frac{\mathrm{d}^2\tilde{R}}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{4}\tilde{R} + (x^2-\lambda)\tilde{R} =& 0 \\ x^2\frac{\mathrm{d}^2\tilde{R}}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}\tilde{R}}{\mathrm{d}x} + \left(x^2 - \frac{4\lambda-1}{4}\right)\tilde{R} =& 0 \end{aligned}$$

のように $\tilde{R}$ に関するベッセルの微分方程式へと変換される．ここで，

$$\lambda = \nu(\nu+1)$$

とおけば

$$\frac{4\lambda-1}{4} = \nu(\nu+1) - \frac{1}{4} = \left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2$$

と完全平方式となるため，R の特殊解

$$R(r) = x^{-\frac{1}{2}}J_{\nu-\frac{1}{2}}(kr)$$

が得られる．これより以下の定義が与えられる．

定義 1.9

$z \in \mathbb{C}$ による複素関数 $w = f(z)$ が定数 $\nu \in \mathbb{C}$ を用いた線型常微分方程式

$$z^2 \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + 2z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + (z^2 - \nu(\nu+1))w = 0$$

を**球ベッセルの微分方程式**という．この微分方程式の特殊解として与えられる

$$j_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\nu-\frac{1}{2}}(z)$$

を**第一種球ベッセル関数 (spherical Bessel function of the first kind)** もしくは単に**球ベッセル関数 (spherical Bessel function)** という．同様にして

$$y_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} Y_{\nu-\frac{1}{2}}(z)$$

を**第二種球ベッセル関数 (spherical Bessel function of the second kind)** もしくは**球ノイマン関数 (spherical Neumann function)** という．ノイマン関数という意の場合には $n_\nu(z)$ とあらわすこともある．また，ハンケル関数に相当する表現として

$$h_\nu^{(1)} = j_\nu(z) + iy_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(z), \quad h_\nu^{(2)} = j_\nu(z) - iy_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} H^{(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}(z)$$

を**球ハンケル関数 (spherical Hankel function)** という．