振動・波動論 -基礎論-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 11 月 12 日

目次

第 1 章 振動 1
1.1 単振動 1
1.2 減衰振動・強制振動 2
1.3 連成振動 4

第 2 章 波動 7
2.1 波動の定義 7
2.2 波の重ね合わせ 8
2.3 境界条件をもつ連成振動による波の形成 11
2.4 境界条件をもたない連成振動による波の形成 15

第 1 章

振動

1.1 単振動

物体が振動をするには運動に対する復元力が必要である．そこで，ロバート・フックにより提唱されたばねとそれにかかる荷重についての運動に対する法則を以下に示す．

フックの法則

ばねの伸びとばねの弾性限界下の荷重は近似的に比例する．これを**フックの法則**という．また，ばねの荷重がないときの自然に停止する位置を**自然長**という．

フックの法則は，自然長の位置を $\boldsymbol{x}_0[m]$，ばねの荷重のある位置を $\boldsymbol{x}[m]$ としたとき，比例定数 $k[N/m]$ により

$$\boldsymbol{F} = k(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

という復元力 $\boldsymbol{F}[N]$ が作用することを意味している．また，k はばね固有の定数であり，これを**ばね定数**という．

このような非保存力を考慮しない線型な復元力による振動を**単振動**という．

ここでは座標系の原点を中心とした単振動について考える．このとき，質量 m の物体が変位 $\boldsymbol{x}$ で単振動するならば比例定数 k を用いて運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = -k\boldsymbol{x}$$

となる．また，これは加速度と変位が平行であるためある軸をあらわす単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ 上で運動をしているものと考えることができる．つまり，運動方程式は $\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{n}$ より

$$m\frac{\mathrm{d}^2|\boldsymbol{x}|}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{n} = -k|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{n}$$

とあらわすことができ，$x = |\boldsymbol{x}|$ とすれば

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$$

という 1 次元の運動方程式を解くというものに帰着させることができる．これは加速度と変位が平行であるならば同様のことがいえる．

この運動方程式の解は特性方程式より

$$m\lambda^2 + k = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

となることから任意定数 C_1, C_2 を用いることで

$$x(t) = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

となる．ここで，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおき，三角関数の合成式より任意定数 A, θ_0 を用いることで

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

とあらわすことができる．このとき，変位の最大値 A を**振幅**，$\omega t+\theta_0$ を**位相**，θ_0 を**初期位相**という．また，単振動であれば ω を**角振動数**といい，単位は rad で**ラジアン**である．$\cos x=\cos(x+2\pi)$ であるため，この運動の振動数 f は

$$f=\frac{\omega}{2\pi}$$

とあらわすことができ，単位は $Hz=s^{-1}$ で**ヘルツ**という．これより，この運動の周期 T は

$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}$$

となる．

よって，単振動に関するより一般の定義を以下のように与える．

定義 1.

ある物理量 X が角振動数 $\omega[rad]$ で単振動をするとは，X について

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2X$$

とあらわされることである．

また，ばねのような線型弾性体の運動による仕事は自然長 $\boldsymbol{x}_0$ に対して

$$\begin{aligned}
W=&\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
=&k\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
=&k\left[\frac{1}{2}|\boldsymbol{x}|^2\right]_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}}-k\boldsymbol{x}_0\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\\
=&\frac{k}{2}|\boldsymbol{x}|^2-\frac{k}{2}|\boldsymbol{x}_0|^2-k\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_0\\
=&\frac{k}{2}|\boldsymbol{x}|^2-k\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}_0+\frac{k}{2}|\boldsymbol{x}_0|^2\\
=&\frac{k}{2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2
\end{aligned}$$

となり，これを線型弾性体における**弾性エネルギー**という．特に，これについての運動方程式の両辺に物体の速度 $\boldsymbol{v}$ をかけて時間積分し，このとき変数変換により任意の経路 $\boldsymbol{x}_a\to\boldsymbol{x}_b$ でこの始点と終点での速度 $\boldsymbol{v}_a,\boldsymbol{v}_b$ を用いることで

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v}=&-k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{v}\\
m\int_{\boldsymbol{v}_a}^{\boldsymbol{v}_b}\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=&-k\int_{\boldsymbol{x}_a}^{\boldsymbol{x}_b}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\\
\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_a|+\frac{k}{2}|\boldsymbol{x}_a-\boldsymbol{x}_0|^2=&\frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_b|+\frac{k}{2}|\boldsymbol{x}_b-\boldsymbol{x}_0|^2
\end{aligned}$$

となり，弾性エネルギーをポテンシャルエネルギーとした力学的エネルギー保存則を満たす．

また，一般には $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ というベクトルは考えず，振動の中心からの変位として考えることがほとんどであり，より一般の運動では振動の中心 $\boldsymbol{x}_0$ をも運動する．

1.2　減衰振動・強制振動

一般に真空中でなければ摩擦や気体の粘性による非保存力が作用するため，単振動をすることは起こりえない．このように非保存力によって振動が減衰し，やがて止まるような運動を**減衰振動**という．

一般に非保存力というのは非線型であるため，解析は困難である．そこで，線型抵抗でもある粘性抵抗のみが作用す

る場合における復元力が作用する運動についてを示す．質量 m の物体が振動の中心からの変位 $\boldsymbol{x}$ で粘性抵抗により減衰振動をするならば，粘性係数 μ および比例定数 k を用いることで

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = -k\boldsymbol{x} - \mu\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$$

とあらわされ，$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, 2\gamma = \frac{\mu}{m}$ として単振動のときと同様の議論をすることで $x = |\boldsymbol{x}|$ で

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 x - 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

とあらわすことができる．この運動方程式の解は特性方程式より

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

となることから，$\gamma^2 - \omega_0^2$ の状態によって 3 つの場合分けをする必要がある．

$\omega_0 < \gamma$ のときは任意定数 C_1, C_2 を用いて $s = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ とすることで

$$x(t) = e^{-\gamma t}(C_1 e^{st} + C_2 e^{-st})$$

となるが，$C_1 e^{st} + C_2 e^{-st}$ は $\cosh t$ の定義式に近いことからカテナリーに近い形状のグラフであり，$\omega_0 < \gamma$ より振動をせずに運動を停止することがわかる．このような減衰を**過減衰**という．

$\omega_0 > \gamma$ のときは任意定数 A, θ_0 を用いて $r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ とすることで

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(rt + \theta_0)$$

となり，これは $\cos(rt + \theta_0)$ が $e^{-\gamma t}$ により減衰することを示していることがわかる．このような減衰が**減衰振動**である．

$\omega_0 = \gamma$ のときは任意定数 C_1, C_2 を用いることで

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t}$$

となり，過減衰と減衰振動のちょうど境界の運動となる．このような減衰を**臨界減衰**もしくは**臨界制動**という．

また，γ は各減衰でどの程度で減衰するかの指標になっており，このような指標を**対数減衰率**もしくは**減衰率**という．同様に，ω_0 は減衰振動における基準となる角振動数であり，このような角振動数を**固有角振動数**という．

一般に振動をする物体はやがて運動を停止するため，外部からエネルギーを供給しなければならない．そのため，線型抵抗による減衰振動をする物体に対して振幅 mf_0 で角振動数 ω な周期的な外力

$$F(t, \omega) = mf_0 \cos\omega t$$

が作用すると考えれば

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t$$

という運動方程式を解けばいい．このとき，未定係数法より 1 つの特殊解は $\omega \neq \omega_0$ を仮定することで定数 C, ϕ を用いて

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi)$$

の形になる．これのそれぞれの微分を元の方程式に代入することで

$$\begin{aligned}
-C\omega^2\cos(\omega t + \phi) - 2\gamma C\omega\sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 C\cos(\omega t + \phi) =& f_0\cos\omega t \\
C(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \phi) - 2C\gamma\omega\sin(\omega t + \phi) =& f_0\cos\omega t \\
C\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}\cos\left(\omega t + \phi - \tan^{-1}\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) =& f_0\cos\omega t
\end{aligned}$$

より，

$$\begin{cases} C = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \\ \phi = \tan^{-1} \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

となる．よって，線型抵抗による周期的な外力を加えたことによる振動の運動方程式の一般解は

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t + \phi) + Ae^{-\gamma t} \cos(rt + \theta_0)$$

となる．このような一定の周期的な外力の作用による外力と同周期の振動を**強制振動**という．特に減衰がないと仮定すれば

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \phi) + Ae^{-\gamma t} \cos(rt + \theta_0)$$

とあらわせるが，$\omega \to \omega_0$ で振幅は無限大に発散する．このような現象を**共振**もしくは**共鳴**という．これは抵抗がある場合でも $\omega^2 \to \omega_0^2 + 2\gamma^2$ で同様に振幅は最大値をとり共振する．

より一般の強制振動では周期的な外力はフーリエ級数によってあらわされ，それは外力の周期 ω に対して振幅定数 A_k と位相定数 φ_k によって

$$F(t, \omega) = m \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

とあらわされるが，1 つの特殊解は未定係数法より定数 C_k, ϕ_k を用いて

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(k\omega t + \phi_k)$$

の形になるため，

$$\begin{cases} C_k = \dfrac{A_k}{\sqrt{(\omega_0^2 - (k\omega)^2)^2 + (2k\gamma\omega)^2}} \\ \phi_k = \varphi_k + \tan^{-1} \dfrac{2k\gamma\omega}{\omega_0^2 - (k\omega)^2} \end{cases}$$

となり，周期的な共振角振動数をもつことがわかる．

1.3　連成振動

ここまでの振動は 1 つの物体における振動を考えたが，ここでは複数の物体における振動について考える．この場合，単振動のように原点を基準に考えたりすることはできないため一般の座標系で考える必要がある．

例えば，複数の物体がばねによって連結されているようなモデルであれば，物体の前後のばねによる振動の作用を受ける．また，ばねによる単振動における角振動数はばね定数と質量に依存するため，同じばねでも異なる物体では角振動数が異なり，解析対象となる物体が多ければ多いほど運動が複雑化する．

ばねによる振動でない場合の振動系が互いに作用しあう運動でも本質的には全て同一であると考えることができるため，振動の減衰を考慮しない複数の物体がばねによって連結されているモデルの運動を考える．

n 個の物体が存在し，それぞれの振動の中心からの変位が $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ で質量は $m_1, m_2, \cdots, m_n$ であるとする．$p \neq q$ で物体の $\boldsymbol{x}_p, \boldsymbol{x}_q$ に対応する物体間にはばね定数 $k_{p,q} = k_{q,p}$ のばねが存在するとし，その全ての $k_{p,q}$ の集合を K とする．また，このばねの伸縮は p 番目の物体から観測すれば $\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q$ となり，q 番目の物体から観測すれば $\boldsymbol{x}_q - \boldsymbol{x}_p$ となる．

つまり，ばねが振動による伸縮以外で歪まないことを仮定することで p 番目の物体の運動方程式は

$$m_p \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}_p}{\mathrm{d}t^2} = -\sum_{k_{p,q} \in K} k_{p,q} (\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q)$$

となり，角振動数 $\omega_{p,q} \neq \omega_{q,p}$ を与えることで

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}_p}{\mathrm{d}t^2} = -\sum_{k_{p,q}\in K} \omega_{p,q}^2 (\boldsymbol{x}_p - \boldsymbol{x}_q)$$

とすることができる．このような複数の振動系が互いに作用しあう運動を**連成振動**という．これは線型常微分方程式であるため，差分方程式に変換することで容易に数値解析可能である．

例えば，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対応する物体のみが存在すると仮定して，境界条件として $\boldsymbol{x}_1$ に対応する物体が固定，つまりは $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$ とすれば

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}_2}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_{2,1}^2 \boldsymbol{x}_2 \end{cases}$$

という運動方程式となり，角振動数 $\omega_{2,1}$ な単振動をあらわすことができる．

また，元の運動方程式を位置ごとに分解してあらわせば

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{x}_p}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\sum_{k_{p,q}\in K} \omega_{p,q}^2\right) \boldsymbol{x}_p + \sum_{k_{p,q}\in K} \omega_{p,q}^2 \boldsymbol{x}_q$$

のように $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ の線型結合によってあらわされるため，

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = -\Omega \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t^2} = -\Omega \boldsymbol{X}$$

のように線型変換の形であらわされる．このとき，Ω は対称行列であるため直交行列により対角化が可能である．つまり，対角化行列 R によって

$$R^T \Omega R = D$$

とあらわすことができ，運動方程式に対して R^T をかけることで

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 (R^T \boldsymbol{X})}{\mathrm{d}t^2} &= -\, R^T \Omega \boldsymbol{X} \\ &= -\, R^T \Omega R R^T \boldsymbol{X} \\ &= -\, D R^T \boldsymbol{X} \end{aligned}$$

となり，R^T により $\boldsymbol{X}$ の基底が変換され，その R^T により変換された座標系での運動方程式となることがわかる．このとき，$\boldsymbol{X}$ の変換されたベクトルを $\boldsymbol{X}_R$ とすることで

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{X}_R}{\mathrm{d}t^2} = -D \boldsymbol{X}_R$$

となり，D は対角行列であることから逆行列は存在し，$\boldsymbol{X}_R$ に対しては各成分をスケール変換するだけである．そのため，これは各ベクトルの成分における単振動の運動方程式に帰着することがわかる．$\boldsymbol{X}_R$ のように複雑な振動を単振動に分解をした個々の単振動を**基準振動**もしくは**基準モード**という．

ここで，$\boldsymbol{X}_R$ の第 k 成分の単振動の角振動数 ω_k は，行列の第 i, j 成分を $(\bullet)_{i,j}$ とあらわすとすれば

$$\omega_k^2 = (D)_{k,k}$$

で与えられ，これは Ω の k 番目の固有値の平方根に等しい．また，$(\boldsymbol{X}_R)_k$ の振動をする軸をあらわすベクトルを $\boldsymbol{n}_{R,k}$ とする．なお，これは $\boldsymbol{X}_R$ と同じ座標系のベクトルである．

よって，単振動の一般解より任意定数 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ および $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ を用いて

$$\boldsymbol{X}_R = \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \boldsymbol{n}_{R,1} \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \boldsymbol{n}_{R,2} \\ \vdots \\ A_n \cos(\omega_n t + \theta_n) \boldsymbol{n}_{R,n} \end{pmatrix}$$

となる．これより，$\boldsymbol{X}_R = R^T \boldsymbol{X}$ であることから

$$\boldsymbol{X} = R \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1)\boldsymbol{n}_{R,1} \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)\boldsymbol{n}_{R,2} \\ \vdots \\ A_n \cos(\omega_n t + \theta_n)\boldsymbol{n}_{R,n} \end{pmatrix}$$

となり，これが連成振動の一般解である．

一般解より，連成振動は単振動の単純な合成としてあらわされることがわかる．これらの単振動の角振動数は元の運動方程式の角振動数とは本質的に異なり，このような角振動数を**固有角振動数**といい，それによってあらわされる連成振動の解を構成する単振動を**固有振動**もしくは**固有モード**という．

また，連成振動について強制振動項や減衰項が存在する場合でも運動方程式は線型操作のみで基準モードは導出されるため，それぞれの項は独立に考えることができる．つまり，連成振動に対して外力が作用する場合でも同様に考えることができる．例えば，角振動数 ω による周期的な外力 $\boldsymbol{F}(t,\omega)$ が作用すると考えれば

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{X}_R}{\mathrm{d}t^2} = -D\boldsymbol{X}_R + R^T \boldsymbol{F}(t,\omega)$$

となり，$\boldsymbol{F}(t,\omega)$ は線型変換によって周期は変わらないため，各々の固有モードの固有角振動数が ω に近づくことにより，そのモードが共振することがわかる．

第 2 章

波動

2.1 波動の定義

定義 2.

振動が時間遷移によって空間に伝搬れる現象を**波動**もしくは**波**という．また，波を構成する物質を**媒質**といい，媒質の振動が波の進行方向に平行である波を**縦波**，進行方向に垂直である波を**横波**という．特に，縦波は媒質の疎密の状態が伝搬されることから**疎密波**ということもある．また，波の発生源を**波源**という．

媒質のある点における時間による変位の変化をあらわしたグラフをその点における**波形**といい，波形の最も高いところを山，低いところを谷といい，波形が正弦であるものを**正弦波**という．また，波は定義される全ての位置で振動をするが，波の定義される任意の位置での振動の平衡状態からの変位を波の**変位**といい，その最大値を**振幅**という．波を示す関数というのは空間の任意の位置と時間により波の変位を返す関数のことである．

波源の振動数が $f[Hz]$ であるとき，媒質全体でこの振動が伝搬し，やがて媒質全体が $f[Hz]$ で振動する．このとき，f をこの波の**周波数**といい，媒質の各点が 1 回振動する時間 $T[s]$ は

$$T = \frac{1}{f}$$

とあらわされ，これをこの波の**周期**という．また，1 周期あたりに振動が伝搬される長さを**波長**といい，正弦波であれば波長 $\lambda[m]$ を用いることで進行速度 $\boldsymbol{v}[m/s]$ は正弦波の進行方向を示す単位ベクトル $\boldsymbol{k}$ により

$$\boldsymbol{v} = \lambda f \boldsymbol{k}$$

とあらわすことができる．また，$\boldsymbol{\lambda} = \lambda \boldsymbol{k}$ を**波長ベクトル**という．

一般に正弦波は正弦の振動が伝搬された 1 次元の波であり，固定された観測点における正弦波は振幅 A と定数 ω, φ を用いて

$$\phi(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$$

とあらわされる．このとき，ω を**角周波数**といい，周波数 f とは

$$\omega = 2\pi f$$

の関係式が成り立つことがただちにわかる．

また，φ を**位相**といい，観測点が波の周期のどの位置であるかを示す指標である．特に，2 つの位置における波が同じ動きをするときは 2 つの波は**同位相**であるといい，逆の動きをするときは**逆位相**であるという．正弦波であれば正弦の性質より，波長 λ に対して λ ごとの位置で同位相であり，$\frac{\lambda}{2}$ ずれた位置から λ ごとの位置で逆位相となる．

$\phi(t)$ を波源における振動として，波源からの任意の位置 x における場合に拡張することを考える．速度を v とすれば $\frac{x}{v}$ は波源の振動が x の位置まで伝搬される時間であり，$t - \frac{x}{v}$ と t における波は同位相である．つまり，任意の位置における波 $\phi(t, x)$ は

$$\phi(t, x) = A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - \varphi\right) = A \sin\left(\omega t - \omega\frac{x}{v} - \varphi\right)$$

となり，ここで波の進行方向に対して正の値をもつように波長 λ を与えて

$$k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi f}{\lambda f}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

とおいたとき，k を**波数**もしくは**位相定数**という．さらに振動の中心である直流成分 d を与えることで

$$\phi(t,x)=A\sin\left(\omega t-kx-\varphi\right)+d$$

とすることができる．これが正弦波の一般式である．

一般に振動が線型でないように波も線型でない．しかし，線型に近似できるということを仮定することで，波の分解や合成を波の和によってあらわすことができる．つまり，一般の波形をもつ波は区分的に滑らかな関数であるときフーリエ級数としてあらわされたり，異なる速度で進行する波をも単純な和であらわすことができる．このように，波を線型と近似することで任意の波は分解および合成できるということを，波動における**重ね合わせの原理**といい，重ね合わせの原理によって新しい波が形成されることを波の**干渉**という．

2.2　波の重ね合わせ

波の重ね合わせを線型な波に限定して考える．

まず，1 次元の変位 x における 2 つの振幅 A の正弦波を重ね合わせた波 $\phi(x,t)$ を考えるとき，それぞれの角周波数を ω_1,ω_2 として位相定数 k_1,k_2 を用いることにより

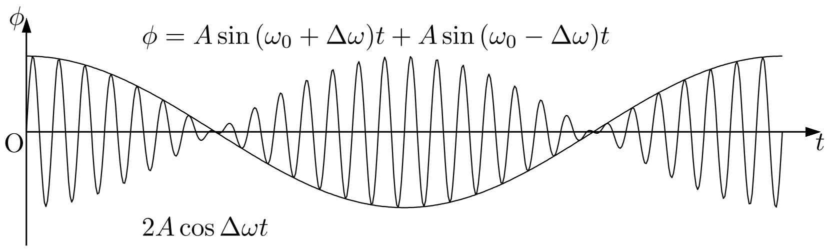
$$\begin{aligned}\phi(x,t)=&A\sin\left(\omega_1 t-k_1x\right)+A\sin\left(\omega_2 t-k_2 x\right)\\=&2A\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t-\frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{k_1-k_2}{2}x\right)\end{aligned}$$

となり，$\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ および $\Delta\omega_0=\frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ とおくことで

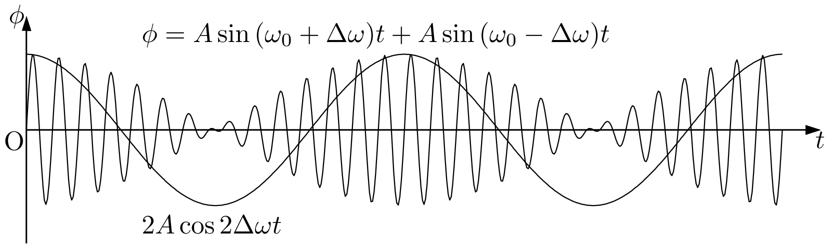
$$\begin{aligned}\phi(x,t)=&2A\sin\left(\omega_0 t-\frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\Delta\omega t-\frac{k_1-k_2}{2}x\right)\\=&A\sin\left((\omega_0+\Delta\omega)t-k_1x\right)+A\sin\left((\omega_0-\Delta\omega)t-k_2x\right)\end{aligned}$$

とあらわすことができる．この波形は $\Delta\omega$ が十分に小さくなればなるほど，角周波数 $\Delta\omega$ の正弦波の波形が顕著にあらわされようになる．このような波の干渉，特に音におけるものを**うなり**という．

また，$\phi(x,t)$ の周期 T は周期 $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1},T_2=\frac{2\pi}{\omega_2}$ の最小公倍数であるため，波の合成において T_1 と T_2 に最小公倍数が存在すれば周期および周波数が定義可能である．実際，うなりが生じるとき



のような波形となるが，人間が観測する音としては



のように疎密波として $2\Delta\omega$ の角周波数で観測される．この疎密波の周波数 f は $f_1 = \frac{1}{T_1}$ および $f_2 = \frac{1}{T_2}$ を用いることで

$$f = \frac{2\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2$$

となり，f を**うなり周波数**という．ただし，これは $f_1 > f_2$ という仮定の下で成り立つ．

正弦波の長さ時間的および空間的には無限大であるが，一般に存在する波は有限の長さであり，これを波の**波束**という．区分的に滑らかな 1 次元の波束 $\psi(x,t)$ は，位相定数 k とそれに対応する角速度スペクトル $\omega = \omega(k)$ と振幅スペクトル $A = A(k)$ による正規化した逆フーリエ変換によって

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{-i\omega(k)t} e^{ikx} \mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \mathrm{d}k$$

とあらわすことができる．また，A は $t = 0$ のときのフーリエ変換

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0) e^{-ikx} \mathrm{d}x$$

によって求めることができる．

このとき k に対応する正弦波の速度 v_k は

$$v_k = \frac{\omega}{k}$$

とあらわされ，このような個々の正弦波の速度を**位相速度**という．また，位相定数の定義より k は波長に反比例することから，$\omega = \omega(k)$ は ω と波長の関係を与えており，これを**分散関係**という．位相速度の定義より

$$\omega = v_k k$$

という関係式が成り立つが，v_k が一定，つまりは波長や振動数によらず速度が一定であるとき**分散がない**といい，速度が一定であることから波は波形を変えずに伝搬し，これには光が当てはまる．

次に，波束の速度について考える．一般に波長や振動数によって位相速度は変化するため，単純な正弦波の重ね合わせである $\psi(x,t)$ の波束の速度について考える．$\phi(x,t)$ は正弦波と余弦波の積によって構成されるが，それぞれの位相速度 v_s, v_c は

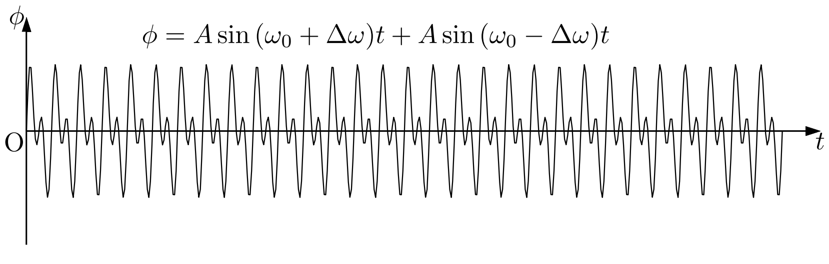
$$v_s = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}, \quad v_c = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

となり，$\omega_0 > \Delta\omega$ であることから波束全体の波形の概形を決定づけるのは余弦波の方であり，波束全体の速度は v_c であるといえる．このような波束の速度を**群速度**という．

また，$k_2 \to k_1$ とすれば $\omega = v_k k$ より $\omega_2 \to \omega_1$ であるため

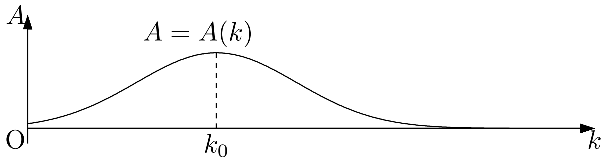
$$v_c = \lim_{k_2 \to k_1} \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \lim_{k_2 \to k_1} \frac{\omega(k_1) - \omega(k_2)}{k_1 - k_2} = \omega'(k_1)$$

となり，これが群速度の一般形である．うなりの発生においては ω_2 が ω_1 に十分に近い必要があり，うなりが生じないとき，すなわち ω_1 と ω_2 が近くないときは



のようにただ 1 つの波束を与えることができず，独立した 2 つの波束の合成として波形を与えることとなる．

$\psi(x,t)$ において，$A(k)$ が k_0 を中心として



のように減衰するとする．このとき，ω はテイラー展開により $\Delta\omega$ を用いて

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^{(n)}(k_0)}{n!}(k-k_0)^n = \omega(k_0) + \Delta\omega$$

とあらわされるとし，これを $\psi(x,t)$ に代入することで

$$\begin{aligned}\psi(x,t) =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx-(\omega(k_0)+\Delta\omega)t)} \mathrm{d}k \\ =& \frac{e^{k_0 x - \omega(k_0)t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i((k-k_0)x - \Delta\omega t)} \mathrm{d}k\end{aligned}$$

となる．ここで，位相速度 $v_{\psi,k}$ は

$$v_{\psi,k} = \frac{\Delta\omega}{k-k_0} = \omega'(k_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega^{(n)}(k_0)}{n!}(k-k_0)^{n-1}$$

となり，ω において $O((k-k_0)^2)$ が無視できるとすれば

$$\omega(k) \fallingdotseq \omega(k_0) + \omega'(k_0)(k-k_0)$$

となるため

$$\psi(x,t) \fallingdotseq \frac{e^{k_0 x - \omega(k_0)t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(x-\omega'(k_0)t)(k-k_0)} \mathrm{d}k$$

が得られる．これより，位相速度は

$$v_{\psi,k} \fallingdotseq \omega'(k_0)$$

となり，全ての位相速度が等しくなることから波束が $\omega'(k_0)$ で伝搬されることがわかる．つまり，ω における $O((k-k_0)^2)$ が十分に無視することができるとすれば群速度は波束の速度となる．逆に，ω における $O((k-k_0)^2)$ が無視できない，つまりは分散が強いときは群速度の正当性のある評価はできなくなる．しかし，多くの場合において，この近似を適用することができる．

次に，位相速度と群速度を 3 次元へと拡張することを考える．まず，波束の波長ベクトル $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ を与えれば位相定数を示すベクトル $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, k_3)$ は

$$\boldsymbol{k} = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_1},\ \frac{1}{\lambda_2},\ \frac{1}{\lambda_3} \right)$$

として，位相速度 $\boldsymbol{v}_\phi$ を分散関係 $\omega = \omega(\boldsymbol{k})$ を用いることにより

$$\boldsymbol{v}_\phi = \omega \left(\frac{1}{k_1},\ \frac{1}{k_2},\ \frac{1}{k_3} \right)$$

とすれば，それぞれの成分における 1 次元での関係式が矛盾なく成り立つため well-defined である．

同様にして群速度は $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_0$ を中心とするテイラー展開により

$$\omega(\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k}_0) + (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\nabla\omega(\boldsymbol{k}_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}((\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\cdot\nabla)^n \omega(\boldsymbol{k}_0)$$

となり，1 次元のときと同様にして $n \geq 2$ を無視できるとすれば $\psi(x,t)$ をそのまま 3 次元に拡張した $\psi(\boldsymbol{x},t)$ は体積領域 $V = \mathbb{R}^3$ により

$$\psi(\boldsymbol{x},t) \fallingdotseq \frac{e^{\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{x} - \omega(\boldsymbol{k}_0)t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} A(\boldsymbol{k}) e^{(\boldsymbol{x}-\omega'(\boldsymbol{k}_0)t)\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)} \mathrm{d}V(\boldsymbol{k})$$

となることから群速度 $\boldsymbol{v}_g$ は

$$\boldsymbol{v}_g = \nabla\omega(\boldsymbol{k}_0)$$

となる．

2.3　境界条件をもつ連成振動による波の形成

連成振動とは物体の振動が他の物体へ作用する運動であるが，その連成振動をする物体の大きさと物体間の距離を無限に小さくすることで，振動の作用は波を形成すると考えることができる．そこで，$N+2$ 個の同じ物体が前後の物体の振動のみが作用する連成振動について考える．このとき，これは 1 次元の波を形成する．

物体の振動の中心がそれぞれ均等に分布しているとして，それぞれの物体の振動の中心からの変位を $y_0, y_1, \cdots, y_{N+1}$ とする．また，境界条件として y_0, y_{N+1} に対応する物体を固定，つまりは $y_0 = y_{N+1} = 0$ とする．それぞれの物体の振動における振動数が全て ω_0 固定であるとすれば，連成振動における運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 \Omega \boldsymbol{Y}$$

となり，y_k に対応する物体に対して復元力が作用すると同時に y_{k-1} と y_{k+1} に対応する物体に振動を伝搬するように力が作用することを示しており，これはあたかも波のような振る舞いである．また，Ω は対称行列であるため対角化が可能である．

ここで，以下の補題を与える．

補題 1.　$N \times N$ の実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

の m 個目の固有値 λ_m は

$$\lambda_m = 4\sin^2 \frac{m\pi}{2(N+1)}$$

であり，それに対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{x}_m$ は

$$\boldsymbol{x}_m = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \begin{pmatrix} \sin \frac{m\pi}{N+1} \\ \sin \frac{2m\pi}{N+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{Nm\pi}{N+1} \end{pmatrix}$$

となる．

Proof.

この命題は $A\boldsymbol{x}_m = \lambda_m \boldsymbol{x}_m$ が恒等的に成り立つことを証明すればいい．また，

$$\sin \frac{0 \cdot m\pi}{N+1} = \sin \frac{(N+1)m\pi}{N+1} = 0$$

となることを用いれば，

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \frac{0 \cdot m\pi}{N+1} \\ \sin \frac{m\pi}{N+1} \\ \sin \frac{2m\pi}{N+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{Nm\pi}{N+1} \\ \sin \frac{(N+1)m\pi}{N+1} \end{pmatrix} = 4\sin^2 \frac{m\pi}{2(N+1)} \begin{pmatrix} \sin \frac{m\pi}{N+1} \\ \sin \frac{2m\pi}{N+1} \\ \sin \frac{3m\pi}{N+1} \\ \vdots \\ \sin \frac{(N-1)m\pi}{N+1} \\ \sin \frac{Nm\pi}{N+1} \end{pmatrix}$$

より，任意の k 行目で

$$-\sin\frac{(k-1)m\pi}{N+1}+2\sin\frac{km\pi}{N+1}-\sin\frac{(k+1)m\pi}{N+1}=4\sin^2\frac{m\pi}{2(N+1)}\sin\frac{km\pi}{N+1}$$

となることを示せばいい．

三角関数の加法定理より

$$\sin\frac{(k\pm 1)m\pi}{N+1}=\sin\frac{km\pi}{N+1}\cos\frac{m\pi}{N+1}\pm\cos\frac{km\pi}{N+1}\sin\frac{m\pi}{N+1}$$

となることから左辺について

$$\begin{aligned}-\sin\frac{(k-1)m\pi}{N+1}+2\sin\frac{km\pi}{N+1}-\sin\frac{(k+1)m\pi}{N+1}=&-2\sin\frac{km\pi}{N+1}\cos\frac{m\pi}{N+1}+2\sin\frac{km\pi}{N+1}\\=&2\sin\frac{km\pi}{N+1}\left(1-\cos\frac{m\pi}{N+1}\right)\\=&4\sin\frac{km\pi}{N+1}\sin^2\frac{m\pi}{2(N+1)}\end{aligned}$$

となり，右辺と左辺は一致する．

次に，$\boldsymbol{x}_m$ が単位ベクトルであることを示す．これは

$$\sum_{k=1}^{N}\sin^2\frac{km\pi}{N+1}=\frac{N+1}{2}$$

となることを示せばいい．このとき，ディリクレ核 $D_N(x)$ を用いることで

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\sin^2\frac{km\pi}{N+1}=&\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2km\pi}{N+1}\right)\\=&\frac{N}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\cos\frac{2km\pi}{N+1}\\=&\frac{N}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}D_N\left(\frac{2m\pi}{N+1}\right)\end{aligned}$$

となる．ディリクレ核の分子について変形をすると，

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1+2N}{2}\frac{2\pi m}{N+1}\right)=&\sin\left(\frac{\pi m}{N+1}+\frac{2N\pi m}{N+1}\right)\\=&\sin\left(\frac{\pi m}{N+1}+2\pi m-\frac{2\pi m}{N+1}\right)\\=&\sin\left(-\frac{\pi m}{N+1}+2\pi m\right)\\=&\sin\left(-\frac{\pi m}{N+1}\right)\cos 2\pi m+\cos\left(-\frac{\pi m}{N+1}\right)\sin 2\pi m\\=&-\sin\frac{\pi m}{N+1}\end{aligned}$$

となるため，ディリクレ核は

$$D_N\left(\frac{2m\pi}{N+1}\right)=\frac{-\sin\frac{\pi m}{N+1}}{2\sin\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi m}{N+1}\right)}=-\frac{1}{2}$$

となる．これを用いれば

$$\sum_{k=1}^{N}\sin^2\frac{km\pi}{N+1}=\frac{N}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{N+1}{2}$$

となり，右辺と左辺は一致する．

よって，命題は証明された．

□

この補題より Ω の k 番目の固有値によりこの運動の固有角振動数 ω_k は

$$\omega_k = \sqrt{\omega_0^2 \cdot 4\sin^2\frac{k\pi}{2(N+1)}} = 2\omega_0 \sin\frac{k\pi}{2(N+1)}$$

と与えられ，一般解は任意定数 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ および $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N$ と Ω の単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_N$ を用いることで

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ \vdots \\ A_n \cos(\omega_N t + \theta_N) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \theta_k) \boldsymbol{u}_k$$

となり，y_m については

$$y_m = \sum_{k=1}^{N} A_k \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\frac{km\pi}{N+1} \cos(\omega_k t + \theta_k)$$

となり，有限フーリエ級数の形となる．特に，対角化行列については

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_N \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_N \end{pmatrix}^{-1}$$

となることから，固有モードにより構成されるベクトルを $\boldsymbol{C}$ とすることで

$$y_m = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{u}_m$$

とあらわすことができる．また，$\boldsymbol{u}_m$ は単位ベクトルであることから y_m は $\boldsymbol{C}$ の $\boldsymbol{u}_m$ への射影であり，クロネッカーのデルタを用いることで

$$\boldsymbol{u}_m \cdot \boldsymbol{u}_n = \delta_{mn}$$

となることから，代数的には Ω の全ての単位固有ベクトルを基底として構成されるベクトル空間 V は正規直交系であり，その空間中を運動する $\boldsymbol{C}$ の各成分が各固有モードの状態を示すことがわかる．

次に，$N \to \infty$ とした場合について考える．y_0 と y_{N+1} に対応する物体は固定であるため，その物体間の長さを L と定義することができる．また，同じ物体かつ振動で同じ角振動数をもつことより，全ての物体の振動の中心は y_0 と y_{L+1} に対応する物体間で等間隔に分布しており，それぞれの物体の振動の中心間の距離 Δx は

$$\Delta x = \frac{L}{N+1}$$

となることから，m 番目の物体の振動の中心の位置は $m\Delta x$ となる．

これより，$x = m\Delta x$ とおくことで

$$m = \frac{x}{\Delta x} = \frac{N+1}{L} x$$

となり，y_m は

$$y(x,t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} A_k \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\frac{k\pi}{L} x \cos(\omega_k t + \theta_k)$$

と連続の式に置き換えることができる．

また，固有角振動数 ω_k は $N \to \infty$ の極限をとることにより

$$\begin{aligned} \omega_k &= \lim_{N\to\infty} 2\omega_0 \sin\frac{k\pi}{2(N+1)} \\ &= \lim_{N\to\infty} 2\omega_0 \frac{\sin\frac{k\pi}{2(N+1)}}{\frac{k\pi}{2(N+1)}} \frac{k\pi}{2(N+1)} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{\omega_0 k\pi}{N+1} \end{aligned}$$

となるが，ω_0 について考えると，これは物体の連結数によって変化する．

これをばねを用いて考えれば，物体間にばねが連結されているが，固定された長さ L 中に N 個の物体が存在すると考えられ，N が大きくなれば 1 つあたりのばねの長さは短くなるためばね定数は変化するはずである．

ここで，以下の補題を与える．

補題 2.　ばね定数 k のばねの長さが n 倍されるとき，ばね定数は $\frac{1}{n}$ となる．

Proof.

長さが n 倍されたばねは，力 $\boldsymbol{F}$ を加えたときに伸縮するばねの長さは元のばねに対して n 倍となる．ここで，$\boldsymbol{F}$ による元のばねの伸縮を $\boldsymbol{x}$ とすれば，ばねの長さを n 倍したばねの伸縮は $n\boldsymbol{x}$ となり，ばねの長さを n 倍したばねのばね定数を k' とすれば

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{x} = -k'n\boldsymbol{x}$$

という関係式が成り立つ．これより

$$k = k'n$$

が得られ，ばねの長さが n 倍されるとき，元のばねに対してばね定数は $\frac{1}{n}$ となる．

よって，命題は証明された．

□

$N=0$ のときの 1 つあたりのばねの長さは L であり，$N=1$ では $\frac{L}{2}$ のようになることから任意の N におけるばねの長さは

$$\frac{L}{N+1}$$

となる．また，補題より長さ L のばねのばね定数に対して任意の N におけるばね定数 k_N は，$N=0$ におけるばね定数を k_0 とすることで

$$k_N = (N+1)k_0$$

となる．同様にして，振動系全体の質量は一定であることから，1 つあたりの質量について $N=0$ のときの質量を m_0 とすることで，任意の N における質量 m_N は境界条件より $N=0$ でも両端に物体が存在するため

$$m_N = \frac{2m_0}{N+2}$$

となる．これより，$N=0$ のときの角振動数を ω_0 とすることで任意の N における角振動数は

$$\sqrt{\frac{k_N}{m_N}} = \sqrt{\frac{(N+1)k_0}{\frac{2m_0}{N+2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\sqrt{N^2+3N+2}$$

となが，$N \to \infty$ となることを考えることで平方根内の 1 次以下の項は十分に無視できるため

$$\frac{\omega_0 N}{\sqrt{2}}$$

となる．

この関係式を代入することで

$$\omega_k = \lim_{N\to\infty} \frac{\omega_0 N}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k\pi}{N+1} = \frac{k\pi\omega_0}{\sqrt{2}}$$

となる．これより連成振動の $N \to \infty$ の極限は

$$y(x,t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} A_k \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\frac{k\pi}{L}x \cos\left(\frac{k\pi\omega_0}{\sqrt{2}}t + \theta_k\right)$$

となり，$\sqrt{\frac{2}{N+1}}$ は定数項であることから任意定数 C_k を

$$C_k = A_k\sqrt{\frac{2}{N+1}}$$

と定義することで波

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{k\pi}{L}x\cos\left(\frac{k\pi\omega_0}{\sqrt{2}}t+\theta_k\right)$$

が得られる．これは境界条件より $y(0,t)=y(L,t)=0$ とならなければならないが，$\sin\frac{k\pi}{L}x$ より境界条件を満たすことがわかる．

次に，$y(x,t)$ の k に対する各項を

$$y_k(x,t)=C_k\sin\frac{k\pi}{L}x\cos(\omega_k t+\theta_k)$$

とおくことにより，各固有モード $y_k(x,t)$ の意味について考える．

時間を固定して考えることで，任意の位置の振動の状態の分布は $\sin\frac{k\pi}{L}x$ の形状に従い，L の長さ内に $\frac{k}{2}$ 個分の正弦波が存在する．また，$\cos(k\pi\omega_0 t+\theta_k)$ は変位に依存しないことから全ての位置で $y_k(x,t)$ は同位相であることがわかる．つまり，$y_k(x,t)$ による波はあたかも進行せずにその場に止まって振動しているように観測される．

$y_k(x,t)$ を積和分解することで

$$y_k(x,t)=\frac{C_k}{2}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{L}x+\omega_k t+\theta_k\right)+\sin\left(\frac{k\pi}{L}x-\omega_k t-\theta_k\right)\right)$$

となり，これは同じ振幅で同じ角周波数の 2 つの正弦波がそれぞれ逆向きに同じ速さで進むとき，その波の合成はあたかも波が進行せずにその場に止まって振動しているように観測されることがわかる．これをより一般に考えれば，$y_k(x,t)$ はその場に止まって振動しているように観測されるため，その合成 $y(x,t)$ もフーリエ級数より区分的に滑らかであるとすればその場に止まって観測されるはずである．このとき，一般に周期をもつ波は角周波数をもたないため，その場に止まって観測されるための条件は，同じ振幅で同じ周波数の 2 つの波がそれぞれ逆向きに同じ速さで進むときである．

よって，以下の定義が与えられる．

定義 3.

同じ振幅で同じ周波数の区分的に滑らかな 2 つの波がそれぞれ逆向きに同じ速さで進むとき，その 2 つの波の合成はあたかも波が進行せずにその場に止まって振動しているように観測される．このような波を**定常波**もしくは**定在波**という．

また，$y_k(x,t)$ は境界条件より $x=0,L$ で固定されるため，これは両端の固定された弦を伝わる波のうち定在波となるものに該当する．このような弦の定在波は弦の振動と考えることができ，特に $y_1(x,t)$ を弦の**基本振動**，$y_k(x,t)$ を弦の **k 倍振動**という．

k 倍振動の波長 λ_k は L 中に $\frac{k}{2}$ 個分の正弦波が存在するため

$$L=\lambda_k\cdot\frac{k}{2}\ \Rightarrow\ \lambda_k=\frac{2L}{k}$$

となり，基本振動の波の速度を v とすることで周波数 f_k は

$$f_k=\frac{v}{\lambda_k}=k\frac{v}{2L}=kf_1$$

となり，これが k 倍振動といわれる理由である．

2.4　境界条件をもたない連成振動による波の形成

予め連成振動に境界条件を与えることで波の式を導出したが，ここでは境界条件を与えない場合での連成振動による波の形成について考える．境界条件をもつ場合と同様にして，同じ物体が前後の物体の振動のみが作用する連成振動について考える．

物体の振動の中心がそれぞれ均等に分布しているとして，それぞれの物体の振動の中心からの変位を $y_0,y_1,\cdots,y_{N+1}$

として，y_0 と y_{N+1} に対応する物体間の長さが L 固定であるとする．このとき，全ての物体が同じ角振動数で振動するとすれば，境界条件が存在するときと同様に考えることで角振動数は $\omega_0 N$ とあらわされるため，y_k に対する運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_k}{\mathrm{d}t^2} = -(\omega_0 N)^2(-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1})$$

となる．

各物体の振動の中心の間隔を Δx とあらわすとすれば，k 番目の物体の振動の中心の位置 x は

$$x = k\Delta x \ \Rightarrow \ k = \frac{x}{\Delta x}$$

となり，$N \to \infty$ では y_k は $y(x,t)$ と連続の式に置き換えることができる．つまり，運動方程式は

$$\frac{\partial^2 y(k\Delta x, t)}{\partial t^2} = -\lim_{N\to\infty}(\omega_0 N)^2(-y((k-1)\Delta x, t) + 2y(k\Delta x) - y((k+1)\Delta x, t))$$

となる．また，$N \to \infty$ で $\Delta x \to 0$ となることから

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{y(x+\Delta x, t) - 2y(x,t) + y(x-\Delta x, t)}{\Delta x^2}$$

より

$$\frac{\partial^2 y(k\Delta x, t)}{\partial t^2} = \lim_{N\to\infty}(\omega_0 N)^2 \Delta x^2 \frac{\partial^2 y(k\Delta x, t)}{\partial x^2}$$

となるが，

$$\Delta x = \frac{L}{N+1}$$

という関係式が成り立つため

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y(k\Delta x, t)}{\partial t^2} &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\omega_0 N L}{N+1}\right)^2 \frac{\partial^2 y(k\Delta x, t)}{\partial x^2} \\
&= (\omega_0 L)^2 \frac{\partial^2 y(k\Delta x, t)}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= (\omega_0 L)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

といった偏微分方程式が得られる．