素朴集合論 -論理と集合-

いろはの学習備忘録
http://168iroha.net

最終更新 2018 年 8 月 18 日

目次

第 1 章

論理式

1.1　命題と真偽

ある事柄が存在し，それが真であるか偽であるかがはっきりいているものを**命題**という．例えば，1 は自然数であるということや 3 は偶数であることが挙げられる．それぞれは真と偽であることは自明である．

定義 1.

2 つの命題 p, q があるとする．「p ならば q である」ということを $p \Rightarrow q$ とあらわし，これが真であれば，p を q の**十分条件**であるといい，q を p の**必要条件**であるという．

また，$q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の**逆**であるといい，それぞれが真であるとき，p は q の**必要十分条件**であるという．同様にして，q は p の必要十分条件である．必要十分条件が成り立つとき，p と q は**論理同値**であるといい，$p \Leftrightarrow q$ もしくは $p \equiv q$ とあらわす．

1.2　論理結合子

与えられた命題から新しい命題を得ることを考える．命題 p が真であるときを 1，偽であるときを 0 であるとする．このとき，p から新しい命題を得る組み合わせは以下の通りとなる．また，このような表を**真理値表**といい，命題の組み合わせによる演算を**論理演算**という．

p	(1)	(2)	(3)	(4)
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

この表から新しい命題として意味を持つのは (3) であり，以下の定義を与えることができる．

定義 2.

命題 p が与えられたとき，以下の真理値表を満たす $\neg p$ を p の**否定**という．

p	$\neg p$
0	1
1	0

また，このような 1 つの項に対する演算子を**単項演算子**という．

同様にして，二項演算による論理演算を考えることができ，以下にそれぞれの定義を示す．

定義 3.

命題 p, q が与えられたとき，以下の真理値表を満たす $p \vee q$ を p と q の**論理和**もしくは**選言**という．

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

定義 4.

命題 p, q が与えられたとき，以下の真理値表を満たす $p \wedge q$ を p と q の**論理積**もしくは**連言**という．

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

また，必要条件や十分条件に関する二項演算は与えられた二項間では定まらないもしくは命題に依存しない演算結果が存在する．このようなものに対して，任意の値を用いるという意味で **Don't care** が用いられる．これは記号 ϕ を用いてあらわされる．

定義 5.

命題 p, q が与えられたとき，以下の真理値表を満たす $p \Rightarrow q$ もしくは $p \to q$ を q は p の**論理包含**もしくは**含意**という．

p	q	$p \Rightarrow q$
0	ϕ	1
1	0	0
1	1	1

これは p が真ならば q も真でなければならないという意味で包含である．

定義 6.

命題 p, q が与えられたとき，以下の真理値表を満たす $p \Leftrightarrow q$ もしくは $p \leftrightarrow q$ を q は p の**論理同値**もしくは**同値**という．

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

これは p という命題が与えられたとき，q に置き換えることができるという意味で同値である．

また，論理演算の演算子をまとめて**論理結合子**という．

1.3 論理演算

命題に関する論理演算で以下の定理が成り立つ．なお，それぞれの証明は真理値表から直ちに確かめることができる．

交換則

命題 p, q が与えられたとき，以下が成り立つ．これを論理演算に関する**交換則**という．

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

結合則

命題 p, q, r が与えられたとき，以下が成り立つ．これを論理演算に関する**結合則**という．

$$(p \vee q) \vee r \equiv q \vee (p \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv q \wedge (p \wedge r)$$

分配則

命題 p, q, r が与えられたとき，以下が成り立つ．これを論理演算に関する**分配則**という．

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

また，それぞれの命題を**元**といい，論理演算に対する特殊な元を以下に示す．これらの特殊な元に対する演算が成り立つことは論理演算の定義から自明である．

零元

命題 p が与えられたとき，以下が成り立つ．これを論理演算に関する**零元**が存在するという．

$$p \vee 1 \equiv 1$$
$$p \wedge 0 \equiv 0$$

零元とは二項演算によって元の性質を吸収するものであり，特に乗法的な二項演算に対しては**吸収元**ということもある．このとき，論理和に対する零元は 1 であり，論理積に対する零元は 0 である．

単位元

命題 p が与えられたとき，以下が成り立つ．これを論理演算に関する**単位元**が存在するという．

$$p \vee 0 \equiv p$$
$$p \wedge 1 \equiv p$$

単位元とは二項演算によって元の性質を変えないものである．このとき，論理和に対する単位元は 0 であり，論理積に対する単位元は 1 である．

補元

命題 p が与えられたとき，以下が成り立つ．これを論理演算に関する**補元**が存在するという．

$$p \vee (\neg p) \equiv 1$$
$$p \wedge (\neg p) \equiv 0$$

補元とは束論における上記のような二項演算の関係である．

また，任意の命題 p に対して二重否定 $\neg(\neg p)$ は元の命題と一致する．これにより，p に対して $\neg p$ が成立するなら

ば，p もまた成立する．このようにして命題を証明する方法を**背理法**という．

また，基本的な論理演算の定理に加えて以下の定理が成り立つ．

ド・モルガンの法則

命題 p, q が与えられたとき，以下が成り立つ．これを**ド・モルガンの法則**という．

$$\neg(p \lor q) \equiv (\neg p) \land (\neg q)$$
$$\neg(p \land q) \equiv (\neg p) \lor (\neg q)$$

これは一般に n 個の項に対しても成立する．

Proof.

$s \equiv \neg(p \lor q)$ とすれば，$p \lor q \nRightarrow s$ である．つまり，$p \nRightarrow s$ および $q \nRightarrow s$ であるから，$\neg p \Rightarrow s$ および $\neg q \Rightarrow s$ が成り立つ．よって，以下が成り立つ．

$$\neg(p \lor q) \Rightarrow (\neg p) \land (\neg q)$$

$t \equiv (\neg p) \land (\neg q)$ とすれば，$t \land q \equiv (\neg p) \land (\neg q) \land q \equiv 0$ および $p \land t \equiv p \land (\neg p) \land (\neg q) \equiv 0$ である．つまり，$p \nRightarrow t$ および $q \nRightarrow t$ であるから，$\neg p \Rightarrow t$ および $\neg q \Rightarrow t$ が成り立つ．よって，以下が成り立つ．

$$(\neg p) \land (\neg q) \Rightarrow \neg(p \lor q)$$

必要十分条件が示されたことから命題が証明された．なお，$\neg(p \land q) \equiv (\neg p) \lor (\neg q)$ についても同様に証明される．

また，一般の n 項の場合も補元と単位元の演算を用いることにより同様に証明される．

□

また，これらの命題に対する論理演算の定義された代数系を**ブール代数**という．

1.4　論理包含における関係

論理包含の同値式

命題 p, q が与えられたときの論理包含について，以下が成り立つ．

$$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \lor q$$
$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \land \neg(q)$$

Proof.

命題に対する真理値表を以下に示す．

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$(\neg p) \lor q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

よって，$p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \lor q$ が成り立つ．

これに対してド・モルガンの法則を適応させる．

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg((\neg p) \lor q)$$
$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv \neg((\neg p)) \land (\neg q)$$
$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \land (\neg q)$$

よって，命題が証明された．

□

対偶論法

命題 p, q が与えられたときの論理包含について，以下が成り立つ．

$$p \Rightarrow q \equiv (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$$

このとき，$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ は $p \Rightarrow q$ の**対偶**であるといい，対偶を用いて命題 $p \Rightarrow q$ を証明する方法を**対偶論法**という．

Proof.

論理包含の同値式より，$(\neg p) \vee q \equiv (\neg(\neg q)) \vee (\neg p)$ を示すことで証明されるが，$(\neg(\neg q)) \vee (\neg p) \equiv q \vee (\neg p)$ となる．交換則により命題が証明された．

□

1.5　述語論理

ある真偽について述べたものがあるとする．これを**叙述**といい，叙述で真偽がはっきりしているものを**命題**という．また，叙述が変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に依存しており，それらに具体的値を代入したとき命題となる叙述を**述語**という．このとき，述語は $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ のようにあらわす．

また，述語も命題となることから命題における論理演算を満たす．

定義 7.

変数 n に対する述語 $p(n)$ が存在するとする．

このとき，全ての n に対して $p(n)$ が真であるとき，それを以下のようにあらわす．

$$\forall n \ s.t. \ p(n)$$

$\forall$ は All の A を反転させたものであり，**全称量子化**もしくは**全称記号**という．$s.t.$ は such that を意味する．また，$p(n)$ が真であるような n が少なくとも 1 つ存在することを以下のようにあらわす．

$$\exists n \ s.t. \ p(n)$$

$\exists$ は Exists の E を反転させたものであり，**存在量子化**もしくは**存在記号**という．

このように，述語が真となるような変数の量を指定することを**量化**といい，それを示す記号を**量化子**という．

また，多変数の場合も同様であり，例えば変数 n_1, n_2 に対する述語 $q(n_1, n_2)$ で全ての n_1 に対して，それよりも小さい n_2 が存在して $q(n_1, n_2)$ が真であることは以下のようになる．

$$\forall n_1, \exists n_2 \ s.t. \ n_2 < n_1 \Rightarrow p(n_1, n_2)$$

量化子を含む演算の交換性

変数 n_1, n_2 に対する述語 $p(n_1, n_2)$ が与えられたとき，量化子の与え方について以下が成り立つ．

$$\forall n_1, \forall n_2 \ s.t. \ p(n_1, n_2) \equiv \forall n_2, \forall n_1 \ s.t. \ p(n_1, n_2)$$
$$\exists n_1, \exists n_2 \ s.t. \ p(n_1, n_2) \equiv \exists n_2, \exists n_1 \ s.t. \ p(n_1, n_2)$$
$$\forall n_1, \exists n_2 \ s.t. \ p(n_1, n_2) \not\equiv \exists n_2, \forall n_1 \ s.t. \ p(n_1, n_2)$$

Proof.

1 式と 2 式が成り立つことは意味より明らかである．

3 式に対しては，「任意の n_1 に対して n_2 が存在して，$p(n_1, n_2)$ が真である」と「ある n_2 が存在して，それに対する任意の n_1 について $p(n_1, n_2)$ が真である」というのは必ずしも一致しない．反例を挙げると，$p(n_1, n_2)$ において n_2 が n_1 によって決定される量ならば $\exists n_2, \forall n_1\ s.t.\ p(n_1, n_2)$ は一般に真にならなくなる．

よって命題は証明された．

□

また，量化子の否定に対して以下の定理が成り立つ．

量化子を含む演算の否定

変数 n に対する述語 $p(n)$ が与えられたとき，量化子のを含む演算の否定について以下が成り立つ．

$$\neg(\forall n\ s.t.\ p(n)) \equiv \exists n\ s.t.\ \neg p(n)$$
$$\neg(\exists n\ s.t.\ p(n)) \equiv \forall n\ s.t.\ \neg p(n)$$

Proof.

1 式と 2 式が成り立つことは意味より明らかである．

□

第 2 章

集合

2.1 集合の定義

定義 8.

n に対する述語 $p(n)$ が存在し，それを満たすような n の集まりを**集合**といい，これを S とすれば以下のようにあらわす．

$$S = \{n \mid p(n)\}$$

このとき，条件を満たす n を S の**要素**もしくは**元**といい，x が S の元であるということは $x \in S$ とあらわし，このような関係を x は S の**帰属関係**にあるという．上に示すような集合の記法を**内延的記法**といい，全ての元を列挙するような記法を**外延的記法**という．

また，集合 T が存在し，T の全ての元が S に属するとき，T は S の**部分集合**であるといい，$T \subseteq S$ とあらわす．これを論理式であらわすと以下のようになる．

$$T \subseteq S \equiv \forall x \in T \Rightarrow x \in S$$

また，部分集合の内，$T \neq S$ となる集合を**真部分集合**といい，$T \subset S$ とあらわす．

特に，元の存在しない集合を空集合といい，$\emptyset$ とあらわす．集合の元の数が有限の集合を**有限集合**といい，元の数が無限大の集合を**無限集合**といい，元の数は $|S|$ のようにあらわす．

2.2 素朴集合論におけるパラドックス

素朴集合論において，その定義の曖昧さから様々なパラドックスを生じる．それを解決するために素朴集合論を公理化し，それを**公理的集合論**という．一般に，素朴集合論ではこのようなパラドックスを無視する．

以下は公理を用いないことによって生じるパラドックスの一例である．

ラッセルのパラドックス

以下のような集合 S を考える．

$$S = \{x \mid x \notin x\}$$

$S \in S$ とすれば，S の定義より $S \notin S$ のため不合理である．$S \notin S$ とすれば，S の定義より $S \in S$ のため不合理である．

このようなパラドックスを**ラッセルのパラドックス**という．

カリーのパラドックス

以下のような集合 S と命題 p を考える．

$$S = \{x \mid x \in x \Rightarrow p\}$$

このような p について証明する．$(x \in S) \Leftrightarrow ((x \in x) \Rightarrow p)$ より $(S \in S) \Leftrightarrow ((S \in S) \Rightarrow p)$ であることから以下が成り立つ．

$$(S \in S) \Rightarrow ((S \in S) \Rightarrow p)$$
$$(S \in S) \Rightarrow p$$

よって，上の命題は $S \in S$ と同値であり，$(S \in S) \Rightarrow p$ からこれは p と同値になる．よって任意の p が真となり不合理である．

このようなパラドックスを**カリーのパラドックス**という．