素朴集合論 -集合の演算-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2018 年 8 月 23 日
最終更新 2020 年 1 月 6 日

目次

第 1 章

写像

1.1 集合演算

定義 1.1

集合 A, B が与えられたとする．A と B の全ての要素をもった集合は $\cup$ により以下のように与えられ，このような演算によって与えられる集合を**合併集合**もしくは**和集合**という．

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$$

A と B の共通の要素をもった集合は $\cap$ により以下のように与えられ，このような演算によって与えられる集合を**共通集合**という．

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$$

特に，$A \cap B = \emptyset$ となるとき，A と B は**互いに素**であるという．また，互いに素な集合の和集合を**直和集合**といい，$A + B$ とあらわすことがある．A から A に属して B に属さない要素を除いた集合は $\setminus$ によって以下のように与えられ，このような演算によって与えられる集合を**差集合**という．

$$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

ある大きな集合 U を固定して部分集合を考えるとき，$A \subseteq U$ のとき $U \setminus A$ となる集合は $\bullet^c$ によって以下のように与えられ，このような演算によって与えられる集合を**補集合**という．

$$A^c = \{x \in U \,|\, \neg(x \in A)\}$$

また，U のことを**全体集合**もしくは**普遍集合**という．

ここで，集合演算に関する基本的な定理を与える．

定理 1.1

集合 A, B, C が与えられたとき，以下の法則が成り立つ．

1). 分配法則

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

2). 結合法則

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3). 分配法則

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Proof.

これらは集合演算の定義と論理演算の性質から自明である．

□

定理 1.2

普遍集合 U と集合 $A, B \subseteq U$ が与えられたとき，以下の二重否定，補元に関する演算，ド・モルガンの法則が成立する．

1)．二重否定

$$(A^c)^c = 0$$

2)．補元に関する演算

$$A \cup A^c = U$$
$$A \cap A^c = \emptyset$$

3)．ド・モルガンの法則

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Proof.

これらは集合演算の定義と論理演算の性質から自明である．

□

定義 1.2

集合 A, B が与えられたとき，$a \in A$ と $b \in B$ を並べた (a, b) を**順序対**という．このような順序対からなる集合を**直積集合**といい，二項演算子 $\times$ を用いて

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

のようにあらわされ，このような演算を**デカルト積**もしくは**直積**といい，一般にこの演算は可換ではなく，A, B が有限集合ならばこの集合の元の数は $|A| \cdot |B|$ であることは自明である．また，3 つ以上の順序対は $(a, b, c, \cdots)$ とあらわす．

特に，同じ集合の直積集合は

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$$

のようにあらわし，これは座標系の表現にも対応し，例えば n 次元ユークリッド空間であれば E^n のようにあらわす．

定義 1.3

集合 A が与えられたとき，A の全ての部分集合からなる集合を**冪集合**といい，$\mathcal{P}(A)$ とあらわす．これを集合を用いてあらわすと以下のようになる．

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

補題 1.1　有限集合 A の冪集合 $\mathcal{P}(A)$ の元の数は，$2^{|A|}$ に等しい．

Proof.

集合のそれぞれの要素の並べ方は可換であるため

$$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{k=0}^{|A|} \binom{|A|}{k} = 2^{|A|}.$$

よって，命題は証明された．

□

このことから集合 X の冪集合は 2^X とあらわされることもある．

1.2　写像

定義 1.4

集合 A, B, R が与えられたとする．$R \subseteq A \times B$ であるとき，R は A と B の **2 項関係**もしくは**関係**といい，$(a, b) \in A \times B$ が $(a, b) \in R$ であるとき，aRb とあらわす．

2 項関係のうち，$a \in A$ ならば $(a, b) \in R$ を満たす $b \in B$ が存在し，$(a, b_1) \in R$ かつ $(a, b_2) \in R$ で $b_1 = b_2$ であるとき，組 $f = (A, B; R)$ を R から定まる**写像**といい，$f : A \to B$ もしくは $A \xrightarrow{f} B$ とあらわす．特に，$(x, y) \in R$ であることを $y = f(x)$ もしくは $f : x \mapsto y$ とあらわし，$R = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ を f の**グラフ**，y の全体

$$\{y \mid \forall x \in A, y = f(x)\}$$

を x の**像**といい，$\mathrm{Im}\, f$ とあらわす．この写像に対して，A を f の**定義域**もしくは**始域**といい，B を f の**値域**もしくは**終域**という．

また，集合 C を与え，写像 $g : B \to C$ を定義したとき，$g \circ f : A \to C$ となる写像を定義することができ，これを**合成写像**という．さらに，写像 $h : A \to C$ を定義すれば $h = f \circ g$ である．これを図式化したものを**可換図式**といい，以下のようにあらわされる．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\
& B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

A の各要素をそれ自身に移す写像を**恒等写像**といい，id_A とあらわす．また，f における合成写像で恒等写像となる写像が存在するとき，これを**逆写像**といい，f^{-1} とあらわす．このとき，$\mathrm{id}_A = f^{-1} \circ f$ を満たす．これらの関係を可換図式で示すと以下のようになる．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A = f^{-1} \circ f"] \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\
& B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

特に，数の集合からなる写像を**関数**という．

写像を論理式であらわすと

$$\forall a \in A, \exists b \in B \ s.t.\ R \subseteq A \times B \ \Rightarrow\ aRb$$

となり，A の全ての要素に対して B のただ 1 つの元に対応させる二項関係が存在するということを示しており，これを写像の定義とすることもできる．また，広義の意味では 2 項演算子や単項演算子も写像であるとすることができる．

ここで，特定の性質をもった写像についての定義を与える．

定義 1.5

集合 A, B が与えられ，写像 f を与えたとする．以下の論理式を満たす写像を**全射**といい，$f : A \twoheadrightarrow B$ とあらわすこともある．

$$\forall b \in B, \exists a \in A \ s.t.\ f(a) = b$$

また，以下の論理式を満たす写像を**単射**といい，$f : A \hookrightarrow B$ とあらわすこともある．

$$\forall a_1, a_2 \in A(a_1 \neq a_2)\ s.t.\ f(a_1) \neq f(a_2)$$

特に，全射であり単射である写像を**全単射**といい，このとき，A と B は**対等**であるという．

特に，合成写像の性質として以下の定理が与えられる．

定理 1.3

集合 X, Y, Z, W に対して写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z, h : Z \to W$ を与えたとき，その合成写像 $g \circ f$ について以下が成り立つ．

1). f と g が単射なら $g \circ f$ も単射である．

2). f と g が全射なら $g \circ f$ も全射である．

3). $g \circ f$ が単射なら f も単射である．

4). $g \circ f$ が全射なら g も全射である．

5). $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

特に，5) を写像の**結合法則 (associative law)** という．

Proof.

1) について，仮定より任意の $x_1, x_2 \in X(x_1 \neq x_2)$ で $f(x_1) \neq f(x_2)$ であり，同様にして $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ となる．つまり，$g \circ f$ は単射である．

2) について，仮定より任意の $z \in Z$ に対して $g(y) = z$ を満たす $y \in Y$ が存在し，同様にして $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ が存在する．つまり，任意の $z \in Z$ に対して $g(f(x)) = z$ を満たす x が存在するため $g \circ f$ は全射である．

3) について，任意の $x_1, x_2 \in X$ で $f(x_1) = f(x_2)$ であると仮定すれば，$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ となり，$g \circ f$ は単射であることから $x_1 = x_2$ である．つまり，f は単射である．

4) について，仮定より任意の $z \in Z$ に対して $g \circ f(x) = z$ を満たす $x \in X$ が存在し，$y = f(x)$ とおけば $y \in Y$ であり，$z = g(y)$ となる．このとき，g の像は Z の任意の元に対応するため g は全射である．

5) について，任意の $x \in X$ を与えれば

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) =& h((g \circ f(x))) = h(g(f(x))) \\ (h \circ g) \circ f(x) =& h \circ g(f(x)) = h(g(f(x))) \end{aligned}$$

となるため，成り立つ．

よって，命題は証明された．

□

定義 1.6

集合 A とその部分集合 $B \subseteq A$ を与えられ，写像 $f : B \to A$ について

$$\forall b \in B\ s.t.\ f(b) = b$$

を満たすとき，この写像を**包含写像**といい，$f : B \hookrightarrow A$ とあらわす．また，集合 C が与えて，写像 $g : A \to C$ を定義したとする．このとき，合成写像 $g \circ f : B \to C$ のことを**制限写像**もしくは**制限**といい，$g|_B$ とあらわす．

また，包含写像は定義より単射であり，このような単射を**自然な単射**ということもある．

集合 A, B を与えたとき，写像 $f : A \to B$ に対して逆写像 f^{-1} が存在するにはこれらが対等であることである．これは全単射の定義から自明である．また，逆写像のような写像を考えることが可能であり，$C \subseteq B$ 以下のようにして A の部分集合を与えることができる．

$$\{a \in A \mid f(a) \in C\} \subseteq A$$

このような集合を f による C の**逆像**といい，$f^{-1}(C)$ とあらわす．また，これは定義より $f^{-1} : 2^B \to 2^A$ となり，

任意の $c \in C$ に対して逆像が高々 1 つしか存在しないことは f が単射であることに等価である．

以下で集合演算と写像についての基本的性質を与える．

定理 1.4

集合 X, Y とその間の写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき，$A, B \in X$ を与えれば，以下の関係式を満たす．

1). $A \subseteq B \ \Rightarrow \ f(A) \subseteq f(B)$

2). $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3). $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Proof.

第 1 式について，写像の定義より $y \in f(A)$ に対して $x \in A$ がただ 1 つ存在し，$x \in B$ である．写像の定義より $f(x) \in f(B)$ であるから $y \in f(B)$ となり，$y \in f(A) \ \Rightarrow \ y \in f(B)$ であり，$A \subseteq B \ \Rightarrow \ f(A) \subseteq f(B)$ が成り立つ．

第 2 式について，写像の定義より $y \in f(A \cup B)$ に対して $x \in A \cup B$ がただ 1 つ存在し，$x \in A, x \in B$ となるから，$y \in f(x)$ より $y \in f(A) \cup f(B)$ であり，$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ である．$A \cup B \supseteq A$ および $A \cup B \supseteq B$ であることから，$f(A \cup B) \supseteq f(A)$ および $f(A \cup B) \supseteq f(B)$ であり，$f(A \cup B) \supseteq f(A) \cup f(B)$ となる．よって，$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ が成り立つ．

第 3 式について，$A \cap B \subseteq A$ および $A \cap B \subseteq B$ であることから，$f(A \cap B) \subseteq f(A)$ および $f(A \cap B) \subseteq f(B)$ であり，$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ となる．

よって，命題は証明された．

□

定義 1.7

集合 A, B を与えたとき，$f : A \to B$ を満たす写像の集合を $\mathrm{Map}(A, B)$ もしくは B^A とあらわす．

1.3　族

定義 1.8

集合の要素が全て集合であるような集合を**集合族**もしくは**族**という．特に，集合 I によって集合族 $\mathcal{A}$ への写像 $A : I \to \mathcal{A}$ を与えたとき，$\mathcal{A}$ の元は I によって関連付けられることから，$\mathcal{A}$ を**添字付けられた集合族**といい，I を**添字集合**という．また，A を恒等写像であるとすれば，集合族は添字付けられた集合族と等しいことから，どちらも集合族とされる場合がある．

このとき，$\mathcal{A}$ は $\lambda \in I$ で $A(\lambda) \in \mathcal{A}$ もしくは $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ とあらわす．

集合族でも集合における演算を同様にして考えることができる．集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ を与えれば，和集合は

$$\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda = \{x \mid \exists \lambda \in I \ s.t. \ x \in A_\lambda\}$$

のようにあらわされ，共通集合も同様にして

$$\bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda = \{x \mid \forall \lambda \in I \ s.t. \ x \in A_\lambda\}$$

とあらわされる．また，$I = \emptyset$ のときは共通集合の命題部は常に真となるため，可能な限りの全ての x についての集合となる．このような集合は定義できないため，空集合における共通集合は集合族を含むような普遍集合でなければならない．このように，特定の状況において考えられる実体の全てを元として含む普遍集合を**宇宙**という．よって，宇宙となる普遍集合 U を用いて集合族の共通部分は

$$\bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda = \{x \in U \mid \forall \lambda \in I \ s.t. \ x \in A_\lambda\}$$

のように定義することができる．このように定義することで共通集合の定義に整合性が得られる．このように数学的概念が矛盾なく定義されることを **well-defined** という．例えば，$\mathbb{R}$ における集合族であれば，宇宙となる普遍集合を $\mathbb{R}$ とすることで well-defined である．

また，集合 B を与えたとき，分配法則により

$$B \cap \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in I}(B \cap A_\lambda), \quad B \cup \bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in I}(B \cup A_\lambda)$$

となり，同様にして，ド・モルガンの法則より

$$\left(\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda^c, \quad \left(\bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda^c.$$

また，I が有限集合であるとき集合族の直積集合は

$$\prod_{\lambda \in I} A_\lambda = \{(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \cdots) \mid \forall \lambda \in I \ s.t.\ a_\lambda \in A_\lambda\}$$

のように与えられ，任意の元は $(a)_{\lambda \in I} \in \prod_{\lambda \in I} A_\lambda$ と表現できるものとする．　ここで，集合族の直積集合に関連する以下の定義を与える．

定義 1.9

集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ に対して，この直積集合を $\lambda_i \in I$ を用いて

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\lambda \in I} A_\lambda & \xrightarrow{\pi_{\lambda_i}} & A_{\lambda_i} \\ \cup\!\!\!\!\raisebox{0.1em}{|} & & \cup\!\!\!\!\raisebox{0.1em}{|} \\ (a_\lambda)_{\lambda \in I} & \longmapsto & a_{\lambda_i} \end{array}$$

のようにあらわされる写像 π_{λ_i} を λ_i に対する**射影**もしくは**射影写像**という．これは定義より I が有限集合であるならば明らかに全射である．

集合 Y を与えたとき，写像 $f_\lambda : Y \to A_\lambda$ の直積を

$$F = \prod_{\lambda \in I} f_\lambda$$

と定義したとき，写像の直積による写像 $F : Y \to \prod_{\lambda \in I} A_\lambda$ は

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{F} & \prod_{\lambda \in I} A_\lambda \\ \cup\!\!\!\!\raisebox{0.1em}{|} & & \cup\!\!\!\!\raisebox{0.1em}{|} \\ y & \longmapsto & (f_\lambda(y))_{\lambda \in I} \end{array}$$

と定義され，同様にして，集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda \in I}$ の直積集合による写像 $F : \prod_{\lambda \in I} B_\lambda \to \prod_{\lambda \in I} A_\lambda$ は

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\lambda \in I} B_\lambda & \xrightarrow{F} & \prod_{\lambda \in I} A_\lambda \\ \cup\!\!\!\!\raisebox{0.1em}{|} & & \cup\!\!\!\!\raisebox{0.1em}{|} \\ (b_\lambda)_{\lambda \in I} & \longmapsto & (f_\lambda(b_\lambda))_{\lambda \in I} \end{array}$$

と定義される．

このように写像の直積を定義することで，写像の射影についても同様のことを考えることができ，集合 Y から集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ の各要素に対する写像 $f_\lambda : Y \to A_\lambda$ と $\lambda_i \in I$ に対する射影 π_{λ_i} について $y \in Y$ を用いることで

$$\left(\pi_{\lambda_i} \circ \prod_{\lambda \in I} f_\lambda\right)(y) = \pi_{\lambda_i}((f_\lambda(y))_{\lambda \in I}) = f_{\lambda_i}(y) \ \Rightarrow \ \pi_{\lambda_i} \circ \prod_{\lambda \in I} f_\lambda = f_{\lambda_i}$$

といった関係式を得ることができ，写像 $g : Y \to \prod_{\lambda \in I} A_\lambda$ を与えれば

$$g(y) = \left(\prod_{\lambda \in I} (\pi_\lambda \circ g) \right)(y) \;\Rightarrow\; g = \prod_{\lambda \in I} (\pi_\lambda \circ g).$$

よって，以下の性質を考えることができる．

定理 1.5

集合 Y と写像 $f_\lambda : Y \to X_\lambda$ によって関連付けることができる集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in I}$ が与えられたとする．$\lambda_i \in I$ を用いて $X = \prod_{\lambda \in I} X_\lambda$ に対する射影 π_{λ_i} を与えたとき，$f_{\lambda_i} = \pi_{\lambda_i} \circ f$ を満たす写像 f がただ 1 つ存在する．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_{\lambda_i}"'] & X \arrow[d, "\pi_{\lambda_i}"] \\ & X_{\lambda_i} \end{tikzcd}$$

このような集合の性質を一意に定める性質を**普遍性**といい，この場合は直積の**普遍性**という．また，このようにただ 1 つ存在することを**一意性**という．

Proof.

$f = \prod_{\lambda \in I} f_\lambda$ とあらわされるとすれば，π_{λ_i} との合成写像は

$$\pi_{\lambda_i} \circ f = \pi_{\lambda_i} \circ \prod_{\lambda \in I} f_\lambda = f_{\lambda_i}$$

となり，$f_{\lambda_i} = \pi_{\lambda_i} \circ f$ を満たす写像 f の存在が示された．

f とは別の $f_{\lambda_i} = \pi_{\lambda_i} \circ f'$ を満たす写像 f' が存在するとすれば，

$$\prod_{\lambda \in I} f_\lambda = \prod_{\lambda \in I} (\pi_\lambda \circ f) = f, \quad \prod_{\lambda \in I} f_\lambda = \prod_{\lambda \in I} (\pi_\lambda \circ f') = f'$$

より $f = f'$ となり，$f \neq f'$ の仮定に矛盾するため f は一意に存在する．

よって，命題は証明された．

□

また，集合族の直積の論理による表現

$$\prod_{\lambda \in I} A_\lambda = \{(a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, \cdots) \mid \forall \lambda \in I \; s.t. \; a_\lambda \in A_\lambda\}$$

は添字集合が無限集合であるとき定義できない．そこで，

$$a : I \to \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda, \quad a \in \mathrm{Map}\left(I, \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \right)$$

のような写像 a を与えれば，集合族の直積は添え字付けられた写像の集合として定義することができる．

$$\prod_{\lambda \in I} A_\lambda = \{(a(\lambda))_{\lambda \in I} \mid \forall \lambda \in I \; s.t. \; a(\lambda) \in A_\lambda\}$$

これにより，添字集合が無限集合の場合でも定義可能となる．

第 2 章

集合の特性

2.1 同値類

定義 2.1

集合 X と空集合を含まない集合の集合 P が与えられたとき，

$$\sum_{A \in P} A = X$$

の関係式を満たすならば，P は X の**分割**であるという．これは，X を空集合を含まないように直和に分割することを示しており，**直和分割**ということもある．

定義 2.2

集合 X の元について 2 項関係 $\sim \subseteq X \times X$ によって，任意の $a, b, c \in X$ について以下の 3 つの条件を満たすことを X 上の**同値関係**にあるといい，これらの条件をまとめて**同値律**という．

1). 反射律

$$a \sim a$$

2). 対称律

$$a \sim b \ \Rightarrow \ b \sim a$$

3). 推移律

$$a \sim b, b \sim c \ \Rightarrow \ a \sim c$$

また，a と同値関係にある X の元の集合を**同値類**といい，集合であらわすと

$$C_a = \{x \in X \mid x \sim a\}.$$

このとき，a をこの同値類の**代表元**であるという．このように，共通の性質によって定義される集合を**クラス**もしくは**類**という．同値類の定義より，任意の $a, b \in X$ で $a \not\sim b$ によって定義される同値類 C_a, C_b は $C_a \cap C_b = \emptyset$ を満たす．つまり，同値類に空集合を含まなければ直和分割が可能であり，特にこのことを**類別**という．

また，X に対する同値類全体の集合 $\{C_a \mid a \in X\}$ は X の分割であり，このような同値類による分割を**商集合**といい，$X/\sim$ とあらわす．特に

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & X/\sim \\ \cup & & \cup \\ a & \longmapsto & C_a \end{array}$$

を満たす写像 π を**商写像**もしくは**標準射影**といい，これは明らかに全射である．

有限の集合

$$A_5 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

が与えられたとき，類別というのは

$$\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4, a_5\}\}, \quad \{\{a_1, a_3, a_5\}, \{a_2, a_4\}\}$$

のように A_5 を分割することを示す．また，同値関係というのは類別するための十分条件であり，集合 X が同値関係 $\sim$ により $a, b \in X$ を代表元として $X = C_a + C_b$ のように類別されるとする．このとき，任意の $x \in X$ で $a \sim x$ ならば $x \in C_a$ である．$x \in C_b$ と仮定すれば $b \sim x$ であるため，推移律から $a \sim b$ となるが，仮定より $a \not\sim b$ であるため $x \notin C_b$ となる．このようにして，同値関係 $\sim$ による同値類は

$$\forall a \in C_a, \forall b \in C_b \;\Rightarrow\; a \sim b$$

となり，定義通り $C_a \cap C_b =$ となる．商集合というのは，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ の元を $n \in \mathbb{N}$ で割ったときの剰余が等しい関係 $\sim$ により類別するとき，この関係 $\sim$ は明らかに同値律を満たし，実際

$$\mathbb{N}/\sim = \{\{0\}, \{1, n+1, n+2, \cdots\}, \{2, n+2, n+2, \cdots\}, \cdots, \{n-1, n+(n-1), 2n+(n-1), \cdots\}\}$$

のように類別される．このように集合を $\sim$ で割った集合であるため，商集合というのである．また，$\sim$ による代表元全体の集合を

$$N = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

としたとき，$\mathbb{N}/\sim$ と N に間には明らかに全単射が存在する．このことから，以下の定義が与えられる．

定義 2.3

集合 X の異なる同値類の代表元からなる集合を，X の同値関係による**完全代表系**という．つまり Y が完全代表系であるとは，包含写像と商写像の合成 $Y \hookrightarrow X \to X/\sim$ が全単射であるということである．

商写像について，集合族の直積と同様にして普遍性を与えることができる．それについてを以下に示す．

定理 2.1

集合 X の $x \in X$ による同値類を C_x としたとき，同値関係 $\sim$ による商集合を $X/\sim$，商写像を π とする．$a, b \in X$ で $a \sim b$ のとき，ある集合 Y に対する $f : X \to Y$ で $f(a) = f(b)$ となる写像 f が存在するとする．このとき，$g : X/\sim \to Y$ で $f = g \circ \pi$ となる写像が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

これを商写像の**普遍性**という．また，f が $a \sim b \;\Leftrightarrow\; f(a) = f(b)$ を満たすとき g は単射となる．

Proof.

任意の $C_x \in X/\sim$ に対して $g(C_x) = f(x)$ と定義すれば

$$(g \circ \pi)(x) = g(C_x) = f(x)$$

となり，$f = g \circ \pi$ となる写像 g の存在が示された．

g とは別の写像 $g' : X/\sim \to Y$ が存在するならば，$f = g' \circ \pi$ を満たすことから $f(x) = (g' \circ \pi)(x) = g'(C_x)$ となり，$g(x) = g'(x)$ である．任意の $x, y \in X$ に対して，$x \sim y \;\Rightarrow\; C_x = C_y$ であるため，全ての場合において $g = g'$ となり，$g \neq g'$ の仮定に矛盾するため g は一意に存在する．

$x \sim y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y)$ であるとき，

$$f(x) = g(C_x) = g(C_y) = f(y)$$

となるため，g は単射となる．

よって，命題は証明された．

□

これより，ただちに以下の系が導かれる．

系 2.1-1　集合 X, Y とそれぞれの同値関係における商集合 $X/\sim, Y/\sim$ と商写像 π_X, π_Y が与えられたとする．$x_1, x_2 \in X$ が $x_1 \sim x_2$ であるとき $f : X \to Y$ で $f(x_1) = f(x_2)$ が存在するとき，$g : X/\sim \to Y/\sim$ が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ X/\sim \arrow[r, "g"] & Y/\sim \end{tikzcd}$$

Proof.
$(\pi_Y \circ f) : X \to Y/\sim$ を商写像の普遍性の証明に用いることでただちに証明される．

□

2.2　順序

定義 2.4

集合 X において，2 項関係 $\leq \subseteq X \times X$ によより，$a, b, c \in X$ について以下の 3 つの条件を満たすとき，$(X; \leq)$ を**順序集合**もしくは**半順序集合**という．

1)．反射律
$$a \leq a$$

2)．推移律
$$a \leq b, b \leq c \ \Rightarrow \ a \leq c$$

3)．反対称律
$$a \leq b, b \leq a \Rightarrow \ a = b$$

一般に半順序集合は比較不可の場合があるが，全ての X の要素が比較可能，すなわち

$$\forall a, b \in X \ s.t. \ a \leq b \ or \ b \leq a$$

を満たす集合を**全順序集合**という．また，$\geq$ を**逆順序**といい，狭義の順序として，以下のようになものが定義される．

$$a < b \ \Leftrightarrow \ a \leq b, a \neq b$$
$$a \ll b \ \Leftrightarrow \ a < b \ and \ \nexists c \in X, a < c < b$$

部分集合 $A \subseteq X$ に対して以下の定義を与える．

1)．$x \in X$ が A の**上界** $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A \ s.t. \ a \leq x$

2)．$x \in X$ が A の**下界** $\Leftrightarrow$ $\forall a \in A \ s.t. \ x \leq a$

3)．$x \in X$ が A の**最大元**:$\max A \Leftrightarrow$ $x \in A$ で x は A の上界

4)．$x \in X$ が A の**最小元**:$\min A \Leftrightarrow$ $x \in A$ で x は A の下界

5)．$x \in X$ が A の**上限**:$\sup A \Leftrightarrow A$ の上界全体の集合の最小元

6)．$x \in X$ が A の**下限**:$\inf A \Leftrightarrow A$ の下界全体の集合の最大元

7)．$x \in X$ が A の**極大元** $\Leftrightarrow$ $x \in A, \forall a \in A \ s.t. \ x \not< a$

8)．$x \in X$ が A の**極小元** $\Leftrightarrow$ $x \in A, \forall a \in A \ s.t. \ a \not< x$

特に，A が上界をもつときを**上に有界**，下界をもつときを**下に有界**であるといい，上下両方で有界であるときは単に**有界**であるという．また，このような対になっている 2 つの関係を**双対**といい，順序集合に対する命題は不等号の向きを逆にした命題も成り立ち，これを**双対原理**という．

定義 2.5

半順序集合 X の元 $a, b \in X$ に対して $[a,b]$ を**閉区間**，(a,b) を**開区間**，$[a,b)$ および $(a,b]$ を**半開区間**という．

$$\begin{aligned}
[a,b] =& \{x \in X \mid a \leq x \leq b\} \\
(a,b) =& \{x \in X \mid a < x < b\} \\
[a,b) =& \{x \in X \mid a \leq x < b\} \\
(a,b] =& \{x \in X \mid a < x \leq b\}
\end{aligned}$$

半順序集合 $(X; \leq)$ の部分集合 $A \subseteq X$ について，最大元が 2 つ以上存在するとし，それぞれを $x_1, x_2 \in X$ とすれば

$$x_1, x_2 \in A, \forall a \in A \ s.t. \ a \leq x_1, a \leq x_2$$

が得られ，これを満たす x_1, x_2 の条件は $x_1 = x_2$ であり，これは最大元が存在するとき一意であることを示している．双対原理より最小元も一意である．また，$x \in X$ が A の最大元であるならば，A の上界全体を U_A とすれば $x \in U_A$ であり，最大元の定義から

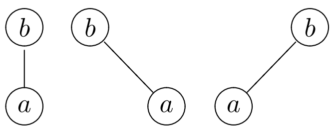
$$\forall u \in U_A \ s.t. \ x \leq u \ \Rightarrow \ u \not< x$$

が成り立ち，これは A に最大元が存在するとき，それは極大元に等しいことを示している．双対原理より最小元に関しても同様である．X が全順序集合であるならば，$a_1, a_2 \in A$ に対して $a_2 \not< a_1 \ \Leftrightarrow \ a_1 \leq a_2$ であることから最大元と極大元および最小元と極小元は一致する．また，一般に最大元と上限および最小元と下限は一致せず，例えば $(0,1) \subset \mathbb{R}$ の上限は 1 であるが，最大元は存在しない．

ここで，半順序集合 $(X; \leq)$ における順序関係を図式化する方法を考えると，以下のような定義を与えることができる．

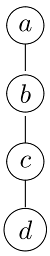
定義 2.6

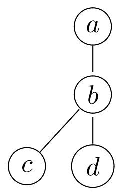
有限の半順序集合 $(X; \leq)$ の $a, b \in X$ が $a < b$ を満たすならば



のように b を a の上方に描き，これを全ての X の順序関係の存在する元同士で行ったものを**ハッセ図**という．

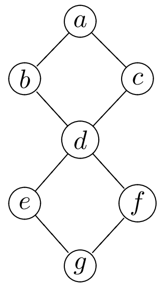
ハッセ図により，$X = \{a, b, c, d\}$ を

1) 

2) 

のようにあらわされるとき，1) のときは $(X; \leq)$ は全順序集合となり，2) のときは $(X; \leq)$ は半順序集合となることがわかる．つまり，有限の半順序集合 $(X; \leq)$ の任意の元 $a \in X$ に対して比較可能な元は，ハッセ図で a を基点とした上下にのみ伸びる線として結ぶことが可能な全ての元である．また，$X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ で部分集合

$M_1 = \{b, c, d\}, M_2 = \{d, e, f\}$ を与え，



のようにあらわされるとする．このとき，M_1 について，a が上界で d, e, f, g が下界，a が上限で d が下限，b, c が極大元で d が最小元となる．同様にして，M_2 について，a, b, c, d が上界で g が下界，d が上限で g が下限，d が最大元で e, f が極小元となる．

また，順序に対する写像について，以下のような定義が与えられる．

定義 2.7

半順序集合 X, Y を関係づける写像 f を与えたとする．この写像について以下のような定義が与えられる．

(1) 順序を保つ写像

$$\forall a, b \in X \ \ s.t. \ a \leq b \ \Rightarrow \ f(a) \leq f(b)$$

(2) 順序を逆にする写像

$$\forall a, b \in X \ \ s.t. \ a \leq b \ \Rightarrow \ f(b) \leq f(a)$$

(3) 順序を反映する写像

$$\forall a, b \in X \ \ s.t. \ f(a) \leq f(b) \ \Rightarrow \ a \leq b$$

(4) 順序を埋め込む写像

$$\forall a, b \in X \ \ s.t. \ a \leq b \ \Leftrightarrow \ f(a) \leq f(b)$$

また，順序を埋め込む写像が全単射であるとき，これを**順序同型写像**といい，X と Y は**順序同型**であるという．順序を反映する写像は定義より明らかに単射であり，順序を埋め込む写像も同様である．