# 素朴集合論 -自然数と濃度-


いろはの学習備忘録
http://168iroha.net



初回更新 2018 年 9 月 4 日
最終更新 2019 年 8 月 5 日

# 目次

# 第 1 章

# 自然数の構成

## 1.1　ペアノの公理

自然数を議論するとき，より厳密に議論するには公理化が必要である．そこで，以下の公理が与えられる．

**公理 1.1**

集合 $N$ が以下の 5 つの公理を満たすとき，これを**自然数**という．なお，この公理では自然数に 0 を含むとし，$suc$ は自然数の次の順序を定める写像であるとする．

1). 0 の存在

$$0 \in N$$

2). 次の順序の存在

$$\forall a \in N \ s.t. \ suc(a) \in N$$

3). 順序を定める写像の単射性

$$\forall a, b \in N (a \neq b) \ s.t. \ suc(a) \neq suc(b)$$

4). 数学的帰納法

$$n \in N \ s.t. \ p(0), p(n), p(suc(n)) \ is \ true \ \Rightarrow \ p(N) \ is \ true$$

一般に自然数は 0 を含めない場合もあるが，ここでは含めるとして扱う．また，ペアノの公理は単射 $\varphi : N \to N$ を用いることで

1). 次の順序の存在

$$0 \notin \varphi(N)$$

2). 数学的帰納法

$$\forall S \subseteq N \ s.t. \ 0 \in S, \varphi(S) \subseteq S \ \Rightarrow \ S = N$$

といった同値な命題として与えられ，この公理を満たす集合は $N$ の代わりに $\mathbb{N}$ とあらわされる．

まずは，写像によるペアノの公理から数学的帰納法を与える．

**定理 1.1　数学的帰納法**

ペアノの公理で与えられる写像を $\varphi$ であるとする．$n \in \mathbb{N}$ による命題 $p(n)$ が与えられたとき，$p(0)$ のとき真であり，$n = k$ のとき $p(k)$ が真と仮定したとき $p(\varphi(k))$ が真であるならば，$p(n)$ は恒等的に真である．これを**数学的帰納法**という．

*Proof.*

$S = \{n \in \mathbb{N} \,|\, p(n)\}$ を定義すれば，仮定より $0 \in S$ である．同様にして，仮定より $S$ が真であるとき $\varphi(S)$ が真であることから $\varphi(S) \subseteq S$ である．これはペアノの公理より $S = \mathbb{N}$ であり，$p(n)$ は恒等的に真である．

よって，命題は証明された．

□

**定理 1.2**

ペアノの公理を満たす集合は全単射で関係付けられる集合を除き一意である．

*Proof.*

ペアノの公理で与えられる写像を $\varphi$ であるとする．

集合 $X$ に対して $\psi : X \to X$ となる写像を与え，直積集合 $A = \mathbb{N} \times X$ を定義し，

$$\begin{aligned} &\exists x_0 \in X \ s.t. \ (0, x_0) \in A \\ &\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N} \ .s.t \ (n, x) \in A \ \Rightarrow \ (\varphi(n), \psi(x)) \end{aligned}$$

の条件を満たす $A$ の集合族 $\mathcal{A}$ を定義する．また，この集合族の直通集合を $B$ とする．

$$B = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

$\mathcal{A}$ の定義より $(0, x_0) \in A \in \mathcal{A}$ であるから $(0, x_0) \in B$ である．また，

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \ s.t. \ (n, x) \in B \ \Rightarrow \ \forall A \in \mathcal{A}, (n, x) \in A \\ &\Rightarrow \ (\varphi(n), \psi(x)) \in A \ \Rightarrow \ (\varphi(n), \psi(x)) \in B \end{aligned}$$

といった論理式が成り立つため $B \in \mathcal{A}$ であり，$\mathcal{A}$ の要素の中で要素数が最小の集合である．また，$n \in N$ について

$$X_n = \{x \in X \mid (n, x) \in B\}$$

といった集合を定義したとき，$X_n$ が単集合であることを数学的帰納法を用いて示す．

$n = 0$ のとき，$X_0$ が単集合でないとすれば，$(0, x_0) \in B$ で $x_0 \in X_0$ のため，$x_0$ 以外の元 $x_0'$ が存在する．つまり，$(0, x_0') \in B$ であり，$B' = B \setminus \{(0, x_0')\} \subset B$ と定義できる．このとき，$(0, x_0) \in B'$ であり，$(n, x) \in B \ \Rightarrow$ $(\varphi(n), \psi(x)) \in B$ より，ペアノの公理から明らかに $(\varphi(n), \psi(x)) \neq (0, x_0')$ であることから $(\varphi(n), \psi(x)) \in B'$ であるため，$B' \in \mathcal{A}$ である．これは $B$ が $\mathcal{A}$ の要素の中で要素数が最小の集合であることに矛盾するため，$X_0$ は単集合である．

次に，$n = k$ のとき，$X_k$ が単集合であると仮定して $X_{\varphi(k)}$ が単集合であることを示す．$X_k$ のただ 1 つの元を $u$ とおけば，$(k, u) \in B \in \mathcal{A}$ より $(\varphi(k), \psi(u)) \in B$ のため $(\varphi(k), \psi(u)) \in X_{\varphi(k)}$ である．$X_{\varphi(k)}$ が単集合でないとすれば，$X_0$ のときと同様にして $\varphi(u)$ の他の元 $v$ が存在し，$B'' = B \setminus \{(\varphi(k), v)\} \subset B$ を定義することができる．$(n, x) \in B \ \Rightarrow \ (\varphi(n), \psi(x)) \in B$ に対して $(\varphi(n), \psi(x)) = (\varphi(k), v)$ とすれば，$\varphi$ は単射であることから $n = k$ であり，$(n, x) = (k, x) \in B$ で $x \in X_n = \{u\}$ より $x = u$ である．これは $\psi(u) = v$ であることを示しており，これは仮定に矛盾するため $(\varphi(n), \psi(x)) \neq (\varphi(k), v)$ でなければならない．したがって，$(\varphi(n), \psi(x)) \in B''$ となるため $B'' \in \mathcal{A}$ となり，$B$ が $\mathcal{A}$ の要素の中で要素数が最小の集合であることに矛盾する．

よって，$X_{\varphi(k)}$ は単集合であり，$X_n$ は恒等的に単集合である．以後，$X_n = \{x_n\}$ とあらわすとする．

$f(n) = x_n$ となる写像 $f : \mathbb{N} \to X$ を定義する．$(n, x_n) \in B$ であることから $(\varphi(n), \psi(x_n)) \in B$ であり，$X_{\varphi(n)} = \{\psi(x_n)\} = \{x_{\varphi(n)}\}$ である．よって，$\psi(x_n) = x_{\varphi(n)}$ となり，$f(\varphi(n)) = x_{\varphi(n)} = \psi(x_n) = \psi(f(n))$ であることから $f \circ \varphi = \psi \circ f$ である．

次に $f \circ \varphi = \psi \circ f$ を満たし，$f(0) = x_0$ となるような $f$ が一意であることを示す．$f$ とは別の写像 $f' : \mathbb{N} \to X$ を与え，数学的帰納法により $f(n) = f'(n)$ を示す．

$n = 0$ のとき，$f(0) = x_0 = f'(0)$ であることから条件を満たす．

$n = k$ のとき，$f(k) = f'(k)$ と仮定したとき，

$$f(\varphi(k)) = \psi(f(k)) = \psi(f'(k)) = f'(\varphi(k))$$

より $f(\varphi(k)) = f'(\varphi(k))$ となるため，恒等的に $f(n) = f'(n)$ であり，$f$ は一意である．

これらを用いて $\mathbb{N}$ が全単射で関係付けられる集合を除き一意であることを示す．$\mathbb{N}$ の他にペアノの公理を満たす集

合 $N'$ が存在するとして，ペアノの公理を与える写像を $\varphi'$ を定義する．このとき，全単射 $\sigma : \mathbb{N} \to N'$ が

$$\begin{cases} \sigma(0) = 0 \\ \sigma \circ \varphi = \varphi' \circ \sigma \end{cases}$$

を満たすとき，$X = N'$ としたときの $f \circ \varphi = \psi \circ f$ の関係式より $\sigma$ は一意である．全単射であることの必要十分条件は $\sigma$ の逆写像 $\sigma'$ が存在することである．$\mathbb{N}$ と $N'$ の役割を入れ替えたとき $\sigma' \circ \varphi' = \varphi \circ \sigma'$ が成り立つことを用いて，両辺に $\sigma'$ を作用させれば

$$\sigma' \circ \sigma \circ \varphi = \sigma' \circ \varphi' \circ \sigma = \varphi \circ \sigma' \circ \sigma$$

となり，この変形を満たす写像が一意であることから $\sigma' \circ \sigma$ は $\mathbb{N}$ における恒等写像である．同様にして $\sigma \circ \sigma'$ が $\mathbb{N}$ における恒等写像であることを示すことができる．よって，条件を満たす全単射 $\sigma : \mathbb{N} \to N'$ は一意であり，$\mathbb{N}$ は全単射で関連付けられる集合を除き一意である．

よって，命題は証明された．

□

また，この証明中より以下の系が与えられる．

**系 1.2-1**　ペアノの公理で与えられる写像を $\varphi$ であるとする．

集合 $X$ に対する写像 $\psi : X \to X$ が存在して，$n \in \mathbb{N}$ に対応する $x_n \in X$ に対して $\psi(x_n) = x_{\varphi(n)}$ を満たすとする．このとき，$x_0 \in X$ に存在して

$$\begin{cases} \tau(0) = x_0 \\ \tau \circ \varphi = \psi \circ \tau \end{cases}$$

を満たす写像 $\tau : \mathbb{N} \to X$ が一意に存在する．

*Proof.*

定理 1.2 より自明である．

□

## 1.2　自然数の演算

まず加法を考えると，$n \in \mathbb{N}$ を加えることを示す写像 $\varphi_n$ を与えれば，加算結果全体を示す集合 $X_n$ に対して $\varphi_n : \mathbb{N} \to X_n$ である．ペアノの公理で与えられる写像を $\varphi$ であるとして $\varphi_n(m) = x_m$ とすれば，$\psi(x_m) = x_{\varphi(m)}$ を満たす写像 $\psi : X_n \to X_n$ は $\varphi_n \circ \varphi = \psi \circ \varphi_n$ を満たす．

ここで，自然数の一般的な加法について考えると $\psi$ は $\varphi$ と $\varphi_n$ の作用の順序，つまりは加算の交換法則を決定づける写像である．また，$\varphi$ は自然数の次の順序を与えるものであるため $\varphi$ も本質的には自然数における加算をする写像であり，$\varphi_{\varphi(0)} = \varphi$ を満たすべきである．これを満たすような $\psi$ は

$$\begin{aligned} \varphi_{\varphi(0)} \circ \varphi =& \psi \circ \varphi_{\varphi(0)} \\ \varphi \circ \varphi =& \psi \circ \varphi \end{aligned}$$

となるため $\psi = \varphi$ である．

よって，加算について以下の定義が与えられる．

**定義 1.1**

ペアノの公理で与えられる写像を $\varphi$ であるとする．

$n \in \mathbb{N}$ に対して，$n$ を加える写像 $\varphi_n$ と加算結果全体を示す集合 $X_n$ により $\varphi_n : \mathbb{N} \to X_n$ を与えることができる．ペアノの公理による写像の対応により，

$$\begin{cases} \varphi_n(0) = n \\ \varphi_n \circ \varphi = \varphi \circ \varphi_n \end{cases}$$

を満たす $\varphi_n$ が一意に存在する．このとき，$m \in \mathbb{N}$ で $\varphi_n(m)$ を $m$ と $n$ の**和**といい，$m+n$ とあらわす．また，$\varphi(0)=1$ と定義する．

$\varphi_0(0)=0$ であることから，$k \in \mathbb{N}$ で $\varphi_0(k)=k$ となると仮定すれば，

$$\varphi_0(\varphi(k)) = \varphi(\varphi_0(k)) = \varphi(k)$$

$\varphi_0(\varphi(k)) = \varphi(k)$ となり，数学的帰納法より $\varphi_0(n)=n$ が恒等的に成り立つ．つまり，$\varphi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ である．

また，自然数における加算の構成より自然に

$$\varphi_{\varphi(0)} = \varphi_1 = \varphi$$

が成り立つため，$\varphi$ と $\varphi_n$ の合成写像によって

$$\begin{cases} (\varphi \circ \varphi_n)(0) = \varphi(n) \\ (\varphi \circ \varphi_n) \circ \varphi = \varphi \circ (\varphi_n \circ \varphi) = \varphi \circ (\varphi \circ \varphi_n) \end{cases}$$

といった関係式が成り立つ．

この式より $\varphi \circ \varphi_n = \varphi_{\varphi(n)}$ が成り立つが成り立つことを示す．$n=0$ のときは

$$\varphi \circ \varphi_0 = \varphi \circ \mathrm{id}_{\mathbb{N}} = \varphi = \varphi_1 = \varphi_{\varphi(0)}$$

となるため，$n=0$ のときは成り立つ．$n$ で成り立つことを仮定して $\varphi(n)$ で成り立つことを示す．$\phi = \varphi_{\varphi(\varphi(n))}$ とおき，任意の $m \in \mathbb{N}$ を用いて両辺に $\varphi$ を作用させることで

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \phi)(m) =& (\varphi \circ \varphi_{\varphi(\varphi(n))})(m) \\ =& (\varphi_{(\varphi\circ\varphi)(n)} \circ (\varphi \circ \varphi_m))(0) \\ =& (\varphi_m \circ \varphi \circ \varphi_{(\varphi\circ\varphi)(n)})(0) \\ =& (\varphi_m \circ \varphi \circ (\varphi \circ \varphi))(n) \\ =& (\varphi_m \circ \varphi \circ \varphi \circ (\varphi \circ \varphi_n))(0) \\ =& (\varphi \circ \varphi \circ \varphi_n)((\varphi \circ \varphi_m)(0)) \\ =& (\varphi \circ \varphi_{\varphi(n)} \circ \varphi)(m)\end{aligned}$$

となり，この写像の式変形の対応は一意であるため，$\phi = \varphi_{\varphi(n)} \circ \varphi$ が成り立つ．よって，恒等的に $\varphi \circ \varphi_n = \varphi_{\varphi(n)}$ が成り立つ．また，定義より $\varphi_n(0) = 0+n = n$ および $\varphi_0(n) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}(n) = n = n+0$ であることから特別な元の存在が与えられる．

**定理 1.3**

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，以下の性質が成り立つ．

$$n+0 = 0+n = n$$

このとき，0 を自然数の加法における**単位元**という．

*Proof.*

導入より自明である．

□

同様にして，加法に関する以下の定理が与えられる．

**定理 1.4**

任意の $a,b,c \in \mathbb{N}$ に対して交換法則，結合法則，簡約法則が成り立つ．

1). 交換法則

$$a+b = b+a$$

2). 結合法則

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

3). 簡約法則

$$a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$$

*Proof.*

交換法則を証明する．

$a$ に関する数学的帰納法で考えれば，$a = 0$ のときは単位元より自明であるため，$a$ で成り立つことを仮定すれば

$$\begin{aligned} \varphi(a) + b =& (\varphi_b \circ \varphi)(a) = \varphi(\varphi_b(a)) \\ b + \varphi(a) =& \varphi_{\varphi(a)}(b) = \varphi(\varphi_b(a)) \end{aligned}$$

となり，$\varphi(a)$ で成り立つため，交換法則が恒等的に成り立つ．

結合法則を証明する．

$a$ に関する数学的帰納法で考えれば，$a = 0$ のときは単位元より自明であるため，$a$ で成り立つことを仮定すれば

$$\begin{aligned} \varphi(a) + (b + c) =& \varphi(a) + \varphi_c(b) \\ =& \varphi_{\varphi(a)}(\varphi_c(b)) \\ =& (\varphi \circ \varphi_a \circ \varphi_c)(b) \\ =& (\varphi_a \circ \varphi_c \circ \varphi \circ \varphi_b)(0) \\ =& (\varphi_c)((\varphi_{\varphi(a)} \circ \varphi_b)(0)) \\ =& c + (\varphi_{\varphi(a)} \circ \varphi_b)(0) \\ =& (\varphi(a) + (b + 0)) + c \\ =& (\varphi(a) + b) + c \end{aligned}$$

となり，$\varphi(a)$ で成り立つため，結合法則が恒等的に成り立つ．

簡約法則を証明する．

これは $\varphi_c(a) = \varphi_c(b) \Leftrightarrow a = b$ となればいいことから $k \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi_k$ が常に単射であることを示せばいい．$k$ に関する数学的帰納法で考えれば，$k = 0$ のときは恒等写像であることより自明であるため，$k$ で成り立つことを仮定すれば

$$\varphi_{\varphi(k)} = \varphi \circ \varphi_k$$

となり，$\varphi(k)$ で成り立ち，単射の合成写像は単射であるため簡約法則が恒等的に成り立つ．

よって，命題は証明された．

□

自然数の演算を考えると，減算と除算は明らかに自然数で閉じた演算にならない．つまり，自然数だけでは一般には定義不可である．そのため，乗算を定義する．

$n \in \mathbb{N}$ を乗ずることを示す写像 $\pi_n$ を与えれば，乗算結果全体を示す集合 $Y_n$ に対して $\pi_n : \mathbb{N} \to Y_n$ である．$m \in \mathbb{N}$ に対応する $y_m \in Y_n$ に対して $\psi(y_m) = y_{\varphi(m)}$ とすれば，$\psi(\varphi_n(m)) = \pi_n(\varphi(m))$ を満たす写像 $\psi : Y_n \to Y_n$ は $\pi_n \circ \varphi = \psi \circ \pi_n$ を満たす．

ここで，自然数の一般的な乗法について考えると $\psi$ は $\varphi$ と $\pi_n$ の作用の順序，つまりは乗算の分配法則を決定づける写像であり，$\psi = \varphi_n$ を満たすべきである．

よって，乗算について以下の定義が与えられる．

**定義 1.2**

ペアノの公理で与えられる写像を $\varphi$，加算で与えられる写像を $\varphi_n$ であるとする．

$n \in \mathbb{N}$ に対して，$n$ を乗ずる写像 $\varphi_n$ と乗算結果全体を示す集合 $Y_n$ により $\pi_n : \mathbb{N} \to Y_n$ を与えることができ

る．ペアノの公理による写像の対応により，

$$\begin{cases}\pi_n(0)=0\\ \pi_n\circ\varphi=\varphi_n\circ\pi_n\end{cases}$$

を満たす $\pi_n$ が一意に存在する．このとき，$m\in\mathbb{N}$ で $\pi_n(m)$ を $m$ と $n$ の**積**といい，$mn$ もしくは $m\cdot n$ や $m\times n$ とあらわす．

このとき，以下のような特別な元の存在が与えられる．

**定理 1.5**

任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$n\cdot 0=0\cdot n=0$$

が成り立つ．このとき，0 を自然数の乗法における**吸収元**もしくは**零元**という．

*Proof.*

積の定義より $\pi_n(0)=0\cdot n=0$ は自明である．

$n\cdot 0=0$ は $n$ に関する数学的帰納法で考えれば，$n=0$ で $\pi_0(0)=0$ となり，$n$ で成り立つことを仮定することで

$$\begin{aligned}\varphi(n)\cdot 0=&(\pi_0\circ\varphi)(n)\\ =&(\varphi_0\circ\pi_0)(n)\\ =&(\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\circ\pi_0)(n)\\ =&\pi_0(n)\\ =&0\end{aligned}$$

となり，$\varphi(n)$ で成り立つため乗法零元の性質が恒等的に成り立つ．

よって，命題は証明された．

□

**定理 1.6**

任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，

$$n\cdot 1=1\cdot n=n$$

が成り立つ．このとき，1 を自然数の乗法における**単位元**という．

*Proof.*

$n$ に関する数学的帰納法で考えれば，$n=0$ のとき吸収源より自明であるため，$n$ で成り立つことを仮定することで

$$\begin{aligned}\varphi(n)\cdot 1=&(\pi_1\circ\varphi)(n)\\ =&\varphi_1(\pi_1(n))\\ =&n+1\\ 1\cdot\varphi(n)=&\varphi(\pi_1(n))\\ =&n+1\end{aligned}$$

となり，$\varphi(n)$ で成り立つため恒等的に乗法単位元の性質が成り立つ．

よって，命題は証明された．

□

**定理 1.7**

任意の $a,b,c\in\mathbb{N}$ に対して分配法則，交換法則，結合法則，簡約法則が成り立つ．

1)．分配法則

$$(a+b)c=ac+bc$$

2). 交換法則

$$ab = ba$$

3). 結合法則

$$a(bc) = (ab)c$$

4). 簡約法則

$$ac = bc \Leftrightarrow a = b$$

*Proof.*

分配法則を証明する．

$a$ に関する数学的帰納法で考えれば，$a = 0$ のときは加法単位元および乗法吸収元より自明であるため，$a$ で成り立つことを仮定することで

$$\begin{aligned}(\varphi(a)+b)c =&\pi_c(\varphi_b(\varphi(a)))\\ =&(\varphi_c(\pi_c \circ \varphi_b)(a))\\ =&(ac+bc)+c\\ =&\varphi_c(\pi_c(a))+bc\\ =&\pi_c(\varphi(a))+bc\\ =&\varphi(a)c+bc\end{aligned}$$

となり，$\varphi(a)$ で成り立つため恒等的に分配法則が成り立つ．

交換法則を証明する．

$a$ に関する数学的帰納法で考えれば，$a = 0$ のときは乗法吸収元より自明であるため，$a$ で成り立つことを仮定することで

$$\begin{aligned}\varphi(a)b =&\pi_b(\varphi(a))\\ =&\varphi_b(\pi_b(a))\\ =&\varphi_b(\pi_a(b))\\ =&ba+b\\ =&b(a+1)\end{aligned}$$

となり，$\varphi(a)$ で成り立つため交換法則が恒等的に成り立つ．

結合法則を証明する．

$a$ に関する数学的帰納法で考えれば，$a = 0$ のときは乗法吸収元より自明であるため，$a$ で成り立つことを仮定することで

$$\begin{aligned}\varphi(a)(bc) =&\pi_{\varphi(a)}(\pi_c(b))\\ =&\pi_c(\pi_{\varphi(a)}(b))\\ =&(\varphi(a)b)c\end{aligned}$$

となり，$\varphi(a)$ で成り立つため結合法則が恒等的に成り立つ．

簡約法則を証明する．

これは $\pi_c(a) = \pi_c(b) \Leftrightarrow a = b$ となればいいことから $k \in \mathbb{N}$ に対して $\pi_k$ が常に単射であることを示せばいい．$k$ に関する数学的帰納法で考えれば，$k = 0$ のときは恒等写像であることより自明であるため，任意の $m \in \mathbb{N}$ を用いて $k$ で成り立つことを仮定することで

$$\pi_{\varphi(k)}(m) = \pi_m(\varphi(k)) = (\pi_m \circ \varphi)(k)$$

となり，$\varphi(k)$ で成り立ち，単射の合成写像は単射であるため簡約法則が恒等的に成り立つ．

よって，命題は証明された．

□

## 1.3　順序集合としての自然数

自然数の演算を定義したことにより，以下のように自然数の順序を定義することができる．

**定義 1.3**

$n, m \in \mathbb{N}$ の順序について，関係演算子 $\leq$ は

$$n \leq m \iff \exists k \in \mathbb{N}, n + k = m$$

のように定義される．また，狭義の順序は

$$n < m \iff \exists k \in \mathbb{N}(k \neq 0), n + k = m$$

のように定義される．

**定理 1.8**

自然数の集合は全順序集合である．

*Proof.*

任意の $a, b, c \in \mathbb{N}$ を用いて証明をする．まずは半順序集合であることを示す．反射律は

$$a \leq a \iff \exists k \in \mathbb{N}, a + k = a$$

を満たすことであるが，これは加法単位元より $k = 0$ で真となるため，反射律を満たす．推移律は

$$a \leq b, b \leq c \iff \exists k, l \in \mathbb{N}, a + k = b, b + l = c$$

を満たすことであるが，これは $a + k + l = c$ であることを示すことから $a \leq c$ となり，推移律を満たす．反対称律は

$$a \leq b, b \leq a \iff \exists k, l \in \mathbb{N}, a + k = b, b + l = a$$

を満たすことであるが，これは $a + k + l = a$ であることを示すことから簡約法則より $k = l = 0$ となり，反対称律を満たす．これより，$\mathbb{N}$ が半順序集合であることが示された．

半順序集合が全順序集合であるとは

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \ s.t. \ a \leq b \ or \ b \leq a$$

を満たすことであるが，自然数の順序の定義より，$a \leq b$ と $b \leq a$ の両方を満たすこともあるため，狭義の順序を用いて

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \ s.t. \ a < b \ or \ b > a \ or \ a = b$$

といった同値な式であらわすことができる．これは順序の定義より同時に 2 つ以上満たすことがないことは自明である．$n$ に関する数学的帰納法で考えれば，$n = 0$ のときは加法単位元であることから $m = 0 + m$ であるため $n \leq m$ であり，$n < m$ か $n = m$ のどちらかを満たす．$n$ で成り立つことを仮定することで

$$\begin{cases} m = n \Rightarrow m + 1 = n + 1 \Rightarrow m < n + 1 \\ m < n, n < n + 1 \Rightarrow m < n + 1 \\ n < m \Rightarrow n + 1 \leq m \Rightarrow n + 1 < m \ or \ n + 1 = m \end{cases}$$

となり，$n + 1$ で成り立つため，自然数は全順序集合である．

よって，命題は証明された．

□

また，自然数は数学的帰納法を満たすが，自然数の性質に着目することで数学的帰納法を一般化することができると考えられる．

そこで，以下の定義を与える．

**定義 1.4**

全順序集合 $(X;\leq)$ によって生成される任意の部分集合に $\leq$ に関する最小元が必ず存在するとき，$X$ は**整列可能**であるといい，$X$ を**整列集合**という．

**定理 1.9**

自然数の集合は整列集合である．

*Proof.*

部分集合 $S \subseteq \mathbb{N}$ に対する部分集合

$$T = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall s \in S \ s.t. \ n \leq s\}$$

を定義すると，任意の $k \in \mathbb{N}$ について $0 \leq k$ であることから $0 \in T$ である．また，任意の $x \in S$ について $x < x+1$ より $x+1 \notin T$ のため $\mathbb{N} \neq T$ である．$\exists y \in T \ s.t. \ y+1 \notin T$ となることから，$y \notin S$ とすれば，$y < x$ である．$y+1 < x$ となるため $y+1 \in T$ となり矛盾であるため，$y \in S$ で $y$ は $S$ の最小限である．

よって，命題は証明された．

□

このように自然数は全順序集合かつ整列集合である．自然数を整列したとき，これを外延的記法であらわせば

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, \cdots\}$$

となり，これに対して順序ごとにの符号を与えることで

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

として扱われる．

これにより，数学的帰納法は整列集合へと一般化することができる．

**定理 1.10　超限帰納法**

整列集合 $(X;\leq)$ の元 $x \in X$ に関する命題 $p(x)$ が任意の $a \in X$ について $a < x$ で $p(a)$ が真であるとき $p(x)$ でも真になるならば，任意の $x \in X$ について $p(x)$ は恒等的に真である．

これを**超限帰納法**という．

*Proof.*

$X$ の最小元 $x_0 \in X$ について，仮定より $p(x_0)$ は真である．ここで，命題が成り立たないと仮定すれば，$p(x)$ が偽となる空集合でない部分集合

$$Y = \{x \in X \,|\, \neg p(x)\}$$

を手危惧することができ，$X$ は整列集合であるため，$Y$ は最小元 $y_0 \in Y$ が存在する．このとき，$Z = \{x \in X \,|\, x < y_0\}$ を定義すれば任意の $z \in Z$ で $p(z)$ は真である．仮定より，$p(y_0)$ も真でなければならないが $y_0 \in Y$ のため矛盾であり，これは条件を満たしても $p(x)$ が偽となる $x \in X$ が存在する整列集合は存在しないことを示している．

よって，命題は証明された．

□

# 第 2 章

# 濃度

## 2.1 集合の濃度

自然数を用いた有限集合の定義を与える．なお，空集合の場合は考えない．

**定義 2.1**

集合 $X$ が有限集合であるとは，以下の論理式が真であるときである．

$$\exists n \in \mathbb{N} \; s.t. \; |X| = n$$

ここで，有限集合と写像および同値類に関する補題を与える．

**補題 2.1** 有限集合 $X$ と集合 $Y$ に対して全射 $f : X \to Y$ が存在するとき $|Y| \leq |X|$ である．これは逆も成り立つ．また，$|X| = |Y|$ であるとき全単射となる $f$ が存在する．

*Proof.*

全射の定義より $f : X \to Y \;\; \Rightarrow \;\; |Y| \leq |X|$ となることは自明である．

$|X| = m, |Y| = n$ とおき，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $x_k \in X, y_k \in Y$ と順序を与え,，最小元をそれぞれ $x_1, y_1$ とする．$n \leq m$ であるから $f : X \to Y$ に対して $1 \leq k \leq n$ で $f(x_k) = y_k$ と定義し，$n < k \leq m$ で任意とすれば $f$ は明らかに全射になる．

$|X| = |Y|$ のとき $m = n$ であり，$n < k \leq m$ を満たす $k$ は存在しないことから $f$ は全単射となる．

よって，命題は証明された．

□

**補題 2.2** 普遍集合 $U$ と部分集合 $X, Y \in U$ が与えられたとき，$X \to Y$ が全単射となる関係を $\sim$ としたとき，$\sim$ は $U$ の同値関係である．

*Proof.*

恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to X$ は明らかに全単射であるため，反射律を満たす．

また，全単射が存在するとき逆写像が存在するため $X \sim Y \;\; \Rightarrow \;\; Y \sim X$ であり，対称律を満たす．

集合 $Z$ を与えたとき全単射 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ を与えれば，合成写像 $g \circ f : X \to Z$ は全単射であるため推移律を満たす．

よって，命題は証明された．

□

以上のことを用いて集合の要素数を一般化した概念を定義することができる．

**定義 2.2**

集合 $X$ が有限であるならば，要素数 $|X|$ を**濃度**といい，$|X|$ もしくは $\mathrm{card}\, X$ とあらわす．$X$ が無限集合であ

るとき，濃度の大きさはできないが写像の性質によって特徴づけることができる．集合 $Y$ および写像 $f : X \to Y$ を定義する．

全単射となる $f$ が存在するならば $\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$ とあらわし，$X$ と $Y$ の濃度が等しいことを示す．また，単射となる $f$ が存在するならば $\mathrm{card}\, X \leq \mathrm{card}\, Y$ とあらわし，$X$ は $Y$ の濃度以下であることを示す．特に $\mathrm{card}\, X \leq \mathrm{card}\, Y$ かつ $\mathrm{card}\, X \neq \mathrm{card}\, Y$ であることを $\mathrm{card}\, X < \mathrm{card}\, Y$ とあらわす．また，普遍集合 $U$ の部分集合の全単射となる同値類に対して，$X$ と $Y$ が同じ同値類に属するとき $\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$ と定義することもできる．特に，$\mathrm{card}\, \mathbb{N}$ のことを**アレフ・ゼロ**といい $\aleph_0$ とあらわす．また，濃度が $\aleph_0$ となる集合を**可算集合**といい，このときの濃度を**可算無限濃度**という．$X$ が可算集合か有限集合である集合であるならば，$X$ は**高々可算**であるという．

$X$ が有限集合の場合について $X$ の冪集合 $2^X$ の要素数は $2^{|X|}$ と与えられることから，$X$ の冪集合の濃度は $2^{\mathrm{card}\, X}$ とあらわすことが多い．

**補題 2.3**　集合 $X, Y$ を与えたとき，写像 $f : X \to Y$ が全射であるとき，$\mathrm{card}\, Y \leq \mathrm{card}\, X$ である．

*Proof.*
単射であるとき逆像は高々 1 つしか存在せず，これを含む写像を定義したとき，この写像は明らかに全射である．
よって，命題は証明された．

□

ここで，写像の存在に関する定理を示す．

**定理 2.1　ベルンシュタインの定理**

集合 $X, Y$ を与えたとき，$f : X \to Y$ と $g : Y \to X$ においてそれぞれ単射となる写像 $f, g$ が存在するならば全単射 $h : X \to Y$ が存在する，すなわち $\mathrm{card}\, X \leq \mathrm{card}\, Y$ かつ $\mathrm{card}\, Y \leq \mathrm{card}\, X$ ならば $\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$ である．これを**ベルンシュタインの定理 (Bernstein theorem)** という．

*Proof.*

$g$ の単射性より $g : Y \to g(Y)$ は全単射である．ここで，写像によって対応がされなかった差集合 $X \setminus g(Y)$ について，$f$ と $g$ で交互に写像を対応させることで

$$X_n = \begin{cases} X \setminus g(Y) & (n = 0) \\ (g \circ f)(X_{n-1}) & (other) \end{cases}$$

といった漸化式を満たす集合族 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を定義する．同様にして

$$Y_n = \begin{cases} f(X \setminus g(Y)) & (n = 0) \\ (f \circ g)(Y_{n-1}) & (other) \end{cases}$$

といった集合族 $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を定義する．

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の和集合を $X'$，$\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の和集合を $Y'$ と定義する．$f$ と $g$ の単射性より，$X_n \to Y_n \to X_{n+1} \to \cdots$ はそれぞれ全単射で関係づけることが可能であり，全ての $Y_n$ は $f$ によって $X_n$ から生成されることから，$f : X' \to Y'$ は全単射である．また，$g$ の単射性よりの逆像は高々 1 つしか存在せず，これへの対応を示す写像を $g^{-1}$ とし，

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in X') \\ g^{-1}(x) & (x \in X \setminus X') \end{cases}$$

といった写像 $h : X \to Y$ を定義する．$(g \circ f)(X_{n-1}) = X_n$ は全単射かつ $g$ は単射であることから，このとき $g$ は全単射となり，$f(X_{n-1}) = g^{-1}(X_n)$ となる．これを用いることで $X'$ に対する $h$ の対応は

$$h(X') = f(X') = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(X_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} g^{-1}(X_n) = g^{-1}(X' \setminus X_0)$$

となり，$X_0$ は定義より $g^{-1}$ の定義域でないことから $g^{-1}(X' \setminus X_0) = g^{-1}(X')$ とあらわすこともできる．$g$ の単射性から $g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_Y$ となることおよび $X_0 = X \setminus g(Y)$ を用いることで

$$g^{-1}(X) = g^{-1}(X \setminus X_0) = g^{-1}(X \setminus (X \setminus g(Y))) = g^{-1}(g(Y)) = Y.$$

これを用いて $X \setminus X'$ に対する $h$ は

$$h(X \setminus X') = g^{-1}(X \setminus X') = g^{-1}(X) \setminus g^{-1}(X') = Y \setminus f(X')$$

といった対応をし，$h$ に対する

$$\begin{cases} f(X') \cap g^{-1}(X \setminus X') = f(X') \cap (Y \setminus f(X')) = \emptyset \\ f(X') \cup g^{-1}(X \setminus X') = f(X') \cup (Y \setminus f(X')) = Y \end{cases}$$

といった 2 式が与えられる．第 1 式は $h$ による $X$ の全要素の対応先が重複しないことを，第 2 式は $h$ による $X$ の全要素の対応先が $Y$ の全要素となることを示している．これはそれぞれ $h$ が単射と全射であることを示していることから，$h$ は全単射である．

よって，命題が証明された．

□

集合 $X, Y$ が与えられたとき，$\mathrm{card}\, X \leq \mathrm{card}\, Y$ および $\mathrm{card}\, Y \leq \mathrm{card}\, Y$ を満たすとする．このとき，ベルンシュタインの定理より $X$ と $Y$ の間に全単射が存在するため，$\mathrm{card}\, X = \mathrm{card}\, Y$ である．集合の濃度による集合を考えれば，これは反対称律を満たす．反射律と推移律が成り立つことは濃度の定義より自明であることから，集合の濃度による集合は半順序集合である．

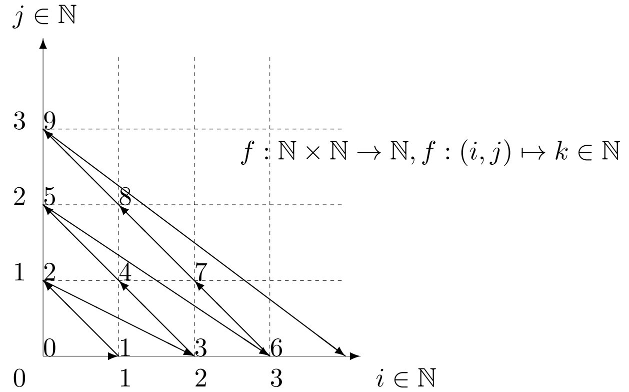
以下では可算集合となる数の集合に対する定理を与える．

**定理 2.2**

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{card}\, \mathbb{N}^n = \aleph_0$.

*Proof.*

写像 $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ を考える．自然数による座標平面を考えれば $f$ は




とすることで明らかに単射である．実際に，これの $(i, j)$ に対する一般項 $a_{(i,j)}$ を求める．$j = 0$ のとき，$a_{(i,0)} = 0, 1, 3, 6, \cdots$ という階差数列になることから一般項は

$$a_{(i,0)} = 0 + \sum_{k=1}^{i} k = \frac{1}{2} i(i+1)$$

となり，$j$ を含めて考えれば，$j$ が 1 増加するごとに階差は 1 だけ増加し，初項に関しては $0, 2, 5, 9, \cdots$ といった階差

数列となることから

$$
\begin{aligned}
a_{(i,j)} =&\sum_{k=1}^{j}(k+1)+\sum_{l=1}^{i}(l+j)\\
=&\frac{1}{2}j(j+1)+j+\frac{1}{2}i(i+1)+ij\\
=&\frac{1}{2}(j^2+2ij+i^2+j+i)+j\\
=&\frac{1}{2}((i+j)^2+i+j)+j
\end{aligned}
$$

となる．また，$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^2$ は例えば $n\in\mathbb{N}$ で $g(n)=(n,0)$ とすれば明らかに単射であるため，ベルンシュタインの定理より $\mathrm{card}\,\mathbb{N}^2=\aleph_0$ となる．これを再帰的に繰り返すことで任意の $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ に対して $\mathrm{card}\,\mathbb{N}^n=\aleph_0$ となる．

よって，命題は証明された．

□

**補題 2.4**　$\mathrm{card}\,\mathbb{Z}=\aleph_0$.

*Proof.*

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ となる関数を $n\in\mathbb{N}$ で

$$
f(n)=\begin{cases}-\dfrac{n-1}{2} & (n\ is\ odd)\\ \dfrac{n}{2} & (n\ is\ even)\end{cases}
$$

と定義すれば $z\in\mathbb{Z}$ で

$$
f^{-1}(z)=\begin{cases}-2z+1 & (z<0)\\ 2z & (z\geq 0)\end{cases}
$$

のように逆関数を与えることができるため，$f$ は全単射である．つまり，$\mathrm{card}\,\mathbb{Z}=\aleph_0$ である．

よって，命題は証明された．

□

**補題 2.5**　$\mathrm{card}\,\mathbb{Q}=\aleph_0$.

*Proof.*

写像 $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ が $p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}$ に対して $f(p,q)=\frac{p}{q}$ と定めれば，$f$ は明らかに全射である．つまり，$\mathrm{card}\,\mathbb{Q}\leq\mathrm{card}\,(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})$ である．$\mathbb{Z}$ は可算集合であるため，定理 2.2 より $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ も可算集合である．つまり，$\mathrm{card}\,\mathbb{Q}\leq\aleph_0$ である．また，$\mathbb{Q}\subset\mathbb{N}$ であることから単射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ が存在し，$\aleph_0\leq\mathrm{card}\,\mathbb{Q}$ となる．ベルンシュタインの定理より $\mathrm{card}\,\mathbb{Q}=\aleph_0$ である．

よって，命題が証明された．

□

## 2.2　連続体濃度

$\mathbb{N}$ や $\mathbb{Q}$ は無限集合であるが可算集合でもある．可算であるとは，直感的には数え上げ可能であるということである．しかし，$\mathbb{R}$ については数え上げ不可であると考えられる．そこで，以下の定理を示す．

**補題 2.6**　$\mathrm{card}\,[0,1)=\mathrm{card}\,\mathbb{R}$.

*Proof.*

写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $x\in\mathbb{R}$ を用いて $f(x)=\tan\left(\frac{x-1}{2}\pi\right)$ として定義域を $(0,1)\subset\mathbb{R}$ とすれば逆関数が存在するため全

単射となり，$\mathrm{card}\,\mathbb{R} = \mathrm{card}\,(0,1)$ である．$g : [0,1) \to (0,1)$ では $x \in [0,1)$ で $g(x) = \frac{x}{2} + 0.1$ とすれば明らかに単射であり，$h : (0,1) \to [0,1)$ では $x \in (0,1)$ で $h(x) = x$ とすれば明らかに単射であることからベルンシュタインの定理より $\mathrm{card}\,[0,1) = \mathrm{card}\,(0,1)$ となる．以上より，$\mathrm{card}\,[0,1) = \mathrm{card}\,\mathbb{R}$ である．

よって，命題は証明された．

□

**定理 2.3**

$\mathbb{R}$ は可算集合ではない．

*Proof.*

補題 2.6 より $[0,1) \subset \mathbb{R}$ が可算集合であることを示せば十分である．$[0,1)$ が可算集合であると仮定して，$[0,1) = \{x_1, x_2, \cdots\}$ のように番号付けして列挙できないことを示す．$x_1, x_2, \cdots$ のそれぞれの小数部を $a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{2,1}, a_{2,2}, \cdots$ を用いて

$$
\begin{aligned}
x_1 =& 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\cdots \\
x_2 =& 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\cdots \\
x_3 =& 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\cdots
\end{aligned}
$$

としたとき，$a_{i,j}$ でないことを $\hat{a}_{i,j}$ とあらわすとすれば

$$
y = 0.\hat{a}_{1,1}\hat{a}_{2,2}\hat{a}_{3,3}
$$

のように与えた $y$ は明らかに $[0,1)$ の元である．しかし，$y$ と $x_1$ では $a_{1,1}$ の部分が異なるため $y \neq x_1$ であり，$y$ と $x_2$ でも $a_{2,2}$ の部分が異なるため $y \neq x$，以下同様にして全ての $x_1, x_2, \cdots$ が $y$ とは異なり，$[0,1) = \{x_1, x_2, \cdots\}$ のように番号付けして列挙可能であることに矛盾する．つまり，$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を満たす全射が存在しないため，$\mathbb{R}$ は可算集合ではない．

よって，命題は証明された．

□

また，$\mathbb{R}$ の具体的な濃度を与えるために，以下の定理を与える．

**補題 2.7**　集合 $X$ とその冪集合 $2^X$ に関して

$$
2^{\mathrm{card}\,X} = \mathrm{card}\,\mathrm{Map}(X, \{0,1\}).
$$

*Proof.*

任意の $A \in 2^X$ により $\chi_A \in \mathrm{Map}(X, \{0,1\})$ を $x \in 2^X$ で

$$
\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x = A) \\ 0 & (x \neq A) \end{cases}
$$

のような写像を定義すれば，$f(A) = \chi_A$ となるような写像 $f : 2^X \to \mathrm{Map}(X, \{0,1\})$ はただちに $f^{-1}(\chi_A) = A$ という逆写像が与えられるため全単射である．つまり，$2^{\mathrm{card}\,X} = \mathrm{card}\,\mathrm{Map}(X, \{0,1\})$ となる．

よって，命題は証明された．

□

**定理 2.4**

$\mathrm{card}\,\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$.

*Proof.*

$[0,1)$ に対して 2 進小数であらわすとすれば，無限小数列全体の集合とは小数第 $n$ 位に対して $\{0,1\}$ を対応する全ての組み合わせであるため，その濃度は $\mathrm{Map}(\mathbb{N},\{0,1\})$ と等しくなり，補題 2.6 より $\mathrm{card}\,\mathbb{R} = \mathrm{card}\,\mathrm{Map}(\mathbb{N},\{0,1\})$ となり，さらに補題 2.7 より $\mathrm{card}\,\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$ となる．

よって，命題は証明された．

□

これより，実数のような非可算集合の濃度についての定義を与える．

**定義 2.3**

$\mathrm{card}\,\mathbb{R}$ のことを**連続体濃度 (cardinality of the continuum)** といい，$\aleph$ とあらわす．

**定理 2.5**

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ で $\mathrm{card}\,\mathbb{R}^n = \aleph$ が成り立つ．

*Proof.*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を考えるとき，$x \in \mathbb{R}$ で $f(x) = (x,0) \in \mathbb{R}$ とすれば明らかに単射である．

$(a,b) \in [0,1)^2$ を無限小数列で考える．小数第 $n$ 桁をそれぞれ $a_n, b_n$ として新しく $c \in [0,1)$ を

$$\begin{aligned} a =& 0.a_1a_2a_3\cdots \\ b =& 0.b_1b_2b_3\cdots \\ c =& 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots \end{aligned}$$

のように定義して，$g : [0,1)^2 \to \mathbb{R}$ を考えれば $g(a,b) = c$ は明らかに単射である．$\mathrm{card}\,[0,1) = \aleph$ より，$[0,1)^2$ と $\mathbb{R}^2$ の間に全単射が存在し，これを合成することで単射 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ が定義される．

よって，ベルンシュタインの定理より $\mathrm{card}\,\mathbb{R}^2 = \aleph$ である．これを再帰的に繰り返すことで任意の $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対して $\mathrm{card}\,\mathbb{R}^n = \aleph$ となる．

よって，命題は証明された．

□

定理 2.3 と定理 2.4 により $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ が得られる．この定理 2.3 の証明における議論を $\mathbb{N}$ に対して一般化することを考える．なお，便宜的に $\mathbb{N}$ は 0 を含まないとして考える．任意の $a \in [0,1)$ に対して，無限小数列は 2 進小数により 0 か 1 をとる $a_1, a_2, \cdots$ を用いて

$$a = 0.a_1a_2a_3\cdots$$

のようにあらわされるが，任意の $N \in 2^{\mathbb{N}}$ と一対一対応を与えるには

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n \in N) \\ 0 & (n \notin N) \end{cases}$$

とすればいい．例えば，$N = \{2,3,5\}$ ならば

$$a = 0.01101$$

と与えられる．これより，定理 2.3 と同様に操作により $2^{\mathbb{N}}$ の元に対して番号付けをして，番号付けにより得ることのできない $2^{\mathbb{N}}$ の元 $\hat{N}$ を生成することを考える．$n$ 番目の $2^{\mathbb{N}}$ の元 $N_n$ の小数第 $n$ 位が 1 であるとは $n \in N_n$ であり，0 であるとは $n \notin N_n$ ということである．つまり，$n$ 番目の $2^{\mathbb{N}}$ の元を対応させる $\varphi(n) = N_n$ を満たす写像 $\varphi : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ を与えれば

$$\hat{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$$

のようになり，これが番号付けして生成することができない，すなわち $\varphi(n) = \hat{N}$ を満たす $n$ が存在しないということである．

この手法を任意の集合に対応することを考えたとき，以下の定理が与えられる．

**定理 2.6　カントールの対角線論法**

集合 $X$ とその冪集合 $2^X$ に対して写像 $\varphi : X \to 2^X$ を与えたとする．$X$ の部分集合 $Y$ を

$$Y = \{x \in X \,|\, x \notin \varphi(x)\}$$

のように与えたとき，$\varphi(x) = Y$ を満たす $x \in X$ は存在しない．これを利用した証明法を**カントールの対角線論法**もしくは単に**対角線論法**という．

*Proof.*

$\varphi(x) = Y$ となる $x \in X$ が存在するとする．$x \in Y$ なら $x \in \varphi(x)$ であり，$x \notin Y = \varphi(x)$ であることから矛盾である．$x \notin Y = \varphi(x)$ なら $x \notin \varphi(x)$ により $x \in Y$ であることから矛盾である．これらの矛盾により，$\varphi(x) \neq Y$ である．

よって，命題が証明された．

□

また，対角線論法により集合と冪集合の濃度について以下の関係式が与えられる．

**定理 2.7　カントールの定理**

集合 $X$ とその冪集合 $2^X$ について，$\mathrm{card}\, X < 2^{\mathrm{card}\, X}$ が成り立つ．

*Proof.*

写像 $f : X \to 2^X$ を $x \in X$ に対して $f(x) = \{x\}$ と定めれば明らかに単射である．また，対角線論法により全射となる $f$ は存在しないため，$\mathrm{card}\, X < 2^{\mathrm{card}\, X}$ である．

よって，命題は証明された．

□