# -ベルヌーイ数-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2020 年 2 月 11 日
最終更新 2020 年 2 月 15 日

## 1　定義と導出

**定義 1**

変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $f(x)$ のテイラー展開

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k$$

により与えられる係数 $B_0, B_1, \cdots$ を**ベルヌーイ数 (Bernoulli number)** という．これは，ベルヌーイ数の指数型母関数による定義である．

もともとベルヌーイ数というのは $k \in \mathbb{N}$ で

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$$

という級数の和を表現するために与えられたものである．しかし，これを直接計算するのは計算量が多いため，$f_k(n)$ をべき乗和の形式で表現する方法を考える．まず，$k = 1$ のときは

$$\begin{aligned} S_1(n) &= 1 + 2 + \cdots + n \\ S_1(n) &= n + (n-1) + \cdots + 1 \end{aligned}$$

となるため

$$2S_1(n) = n(n+1) \ \Rightarrow \ S_1(n) = \frac{1}{2} n(n+1).$$

$k = 2$ のときは，

$$(i+1)^3 - i^3 = (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$$

および

$$\sum_{i=1}^{n} i^k((i+1)^3 - i^3) = (n+1)^3 - 1^3$$

となることから

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - 1^3 &= 3S_2(n) + 3S_1(n) + n \\ S_2(n) &= (n+1)^3 - 1 - 3S_1(n) - n \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3\frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

同様にして $k=3$ のときも

$$(i+1)^4 - i^4 = (i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1) - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$$

となることから

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 - 1^4 =& 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + n \\
4S_3(n) =& n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 6S_2(n) - 4S_1(n) - n \\
=& n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) \\
=& n(n+1)(n^2 + 3n + 3) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) \\
=& n(n+1)(n^2 + 3n + 3 - (2n+1) - 2) \\
=& n(n+1)(n^2 + n) \\
=& (n(n+1))^2 \\
S_3(n) =& \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2.
\end{aligned}$$

この手法は一般の場合も考えることができ，$k$ に対しては $(i+1)^{k+1} - i^{k+1}$ を考えればいい．また，$k=1$ の場合は別の手法により導出をしたが，

$$(i+1)^2 - i^2 = 2i + 1$$

となることから

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 - 1^2 =& 2S_1(n) + n \\
S_1(n) =& \frac{1}{2}(n^2 + n) \\
=& \frac{1}{2}n(n+1)
\end{aligned}$$

というように同じ結果が得られる．

一般の $k$ の場合は，二項定理より

$$(i+1)^{k+1} - i^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} i^j - i^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} i^j$$

となるため，

$$\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} - 1^{k+1} =& \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} i^j \\
=& \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} \sum_{i=1}^{n} i^j \\
=& \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} S_j(n) \\
(k+1)S_k(n) =& (n+1)^{k+1} - 1^{k+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \\
S_k(n) =& \frac{1}{k+1} \left( (n+1)^{k+1} - 1^{k+1} - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right).
\end{aligned}$$

このとき，$S_k(n)$ は $n$ についての $k+1$ 次の多項式であるため，その係数について考える．そのために

$$S_k(n) = \sum_{i=0}^{n-1} i^k$$

のように 1 ではなく 0 を基準としたべき乗和として考える．これにより，$S_k(n)$ は

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left(n^{k+1} - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}S_j(n)\right)$$

と表現をすることができる．そして，$S_k(n)$ を多項式の係数 $C_{k,0}, C_{k,1}, \cdots, C_{k,k+1}$ を用いて

$$S_k(n) = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k,i}n^i$$

とあらわすとする．$S_k(n)$ は $n$ に関する多項式では $S_0(n), S_1(n), \cdots, S_{k-1}(n)$ により構成され，これを再帰的に行うことで $S_0(n) = n$ により構成をすることができる．つまり，$C_{k,0} = 0$ が常に成り立つ．他の係数を直接係数を求めるとき，$n^{k+1}$ の $C_{k,k+1}$ は容易に求まるが，それ以外は二項係数の関係が複雑化するため，$S_k(n)$ を $n = 0$ でテイラー展開することにより求めるとする．$S_k(n)$ は $k+1$ 次の多項式であるため，$S_k(n)$ をテイラー展開すると

$$S_k(n) = \sum_{i=0}^{k+1}\frac{S_k^{(i)}(0)}{i!}n^i.$$

$S_k(n)$ の定義より $S_k(m+1) - S_k(m) = m^k$ となることから

$$\begin{aligned}
S_k'(m+1) - S_k'(m) =& km^{k-1} \\
\sum_{m=0}^{n-1}(S_k'(m+1) - S_k'(m)) =& k\sum_{m=0}^{n-1} m^{k-1} \\
S_k'(n) - S'(0) =& kS_{k-1}(n) \\
S_k'(n) =& kS_{k-1}(n) + C_{k,1}.
\end{aligned}$$

この関係式に対して逐次微分を適用すると

$$S_k^{(i)}(n) = \frac{k!}{(k-i)!}S_{k-i}(n) + \frac{k!}{(k-i+1)!}C_{k-i+1,1}$$

となり，$S_{k-i}(n)$ の定数成分 $C_{k-i+1,0}$ は 0 であるため $n = 0$ を代入すると $C_{k-i+1,1}$ に関する項のみが残る．そして，これを $S_k(n)$ のテイラー展開に対して代入をする．

$$\begin{aligned}
S_k(n) =& S_k(0) + \sum_{i=1}^{k+1}\frac{k!}{(k-i+1)!}C_{k-i+1,1}\frac{n^i}{i!} \\
=& \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!}C_{k-i+1,1}n^i \\
=& \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}\binom{k+1}{i}C_{k-i+1,1}n^i \\
=& \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}C_{i,1}n^{k-i+1}
\end{aligned}$$

このとき，$B_i = C_{i,1}$ と定義した $B_k$ がベルヌーイ数である．ベルヌーイ数を用いることで $S_k(n)$ は

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i n^{k-i+1}$$

となり，これをベルヌーイの公式 **(Bernoulli's formula)** という．これに対して $n = 1$ としたとき

$$0 = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i$$

となり，これを変形することにより

$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i}B_i+B_k=&0\\ B_k=&-\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i}B_i\end{aligned}$$

といった漸化式が与えられる．また，$B_0$ については $S_0(n)=1$ となるため，$B_0=1$ である．

ここで，最初に与えたベルヌーイ数の定義との同値性についての証明を与える．

**定理 1**

変数 $x\in\mathbb{R}$ による関数 $f(x)$ のテイラー展開

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k$$

により与えられる係数 $B_0,B_1,\cdots$ と

$$\begin{cases}B'_0=1\\ B'_k=-\dfrac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i}B'_i\end{cases}$$

により与えられる $B'_0,B'_1,\cdots$ は同値である．

*Proof.*

$B_0,B_1,\cdots$ から $B'_0,B'_1,\cdots$ を求める．

$$\begin{aligned}f(x)(e^x-1)=x=&\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k\right)(e^x-1)\\ =&\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{x^l}{l!}\right)\\ =&\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+l}}{k!l!}B_k\end{aligned}$$

ここで，$m=k+l$ とおけば，$l\geq 1$ より $m-k\geq 1$，つまり $m-1\geq k$ となるため，そのように変数変換をすると

$$\begin{aligned}x=&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^m}{(m-k)!k!}B_k\\ =&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\frac{B_k}{m!}x^m\\ =&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}B_k.\end{aligned}$$

ここで，この恒等式を成り立たせるための必要十分条件を考えると，$m=1$ に関する項のみが残る，すなわち $m\geq 1$ で

$$\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}B_k=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}B_k=0$$

となることとなる．また，$B_0$ については

$$x=B_0x$$

となるため，$B_0=1$ となり，

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_m = -\dfrac{1}{m+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}B_i \end{cases}$$

といった $B_0', B_1', \cdots$ と同一の漸化式が得られる．$B_0', B_1', \cdots$ から $B_0, B_1, \cdots$ を求めるときはこれと逆の操作をすることで直ちに得られる．

よって，命題は証明された．

□

これより，以下の系が得られる．

**系 1-1**　ベルヌーイ数 $B_k$ の $k=1$ を除く奇数項は $0$ である．

*Proof.*

ベルヌーイ数の指数型母関数 $f(x)$ を用いて新たに

$$g(x) = f(x) + \frac{x}{2} = \frac{2x}{2(e^x-1)} + \frac{x(e^x-1)}{2(e^x-1)} = \frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}$$

を定義すれば，

$$g(-x) = \frac{-x}{2}\cdot\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = \frac{x}{2}\cdot\frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{e^{-x}+1}{-e^{-x}+1} = \frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1} = g(x)$$

より $g(x)$ は偶関数である．つまり，$g(x)$ のベルヌーイ数を用いたテイラー展開

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k + \frac{x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k - xB_1 = B_0 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_k}{k!}x^k$$

は $k$ が奇数の項は $0$ となる．つまり，$m \in \mathbb{N}(m>0)$ で $B_{2m+1}=0$ となる．

よって，命題は証明された．

□

# 2　ベルヌーイ多項式

**定義 2**

変数 $x \in \mathbb{R}$ による $n$ 次のモニック多項式

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

をベルヌーイ多項式 **(Bernoulli polynomial)** という．なお，$B_{n-k}$ はベルヌーイ数を示す．

ベルヌーイ多項式はベルヌーイの公式と似た形をしており，ベルヌーイの公式による総和を $S_k(n)$ と記述するとすれば

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k} = B_n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k x^{n-k} = B_n + nS_{n-1}(x)$$

となるため，

$$S_n(x) = \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}}{n+1}.$$

また，ベルヌーイ多項式の定義より $B_n(0) = B_n$ であるため，

$$S_n(x) = \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)}{n+1}$$

のように表現をすることもできる．また，

$$S_n(x+1)-S_n(x)=x^n$$

の関係式を用いると

$$x^n=\frac{B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)}{n+1}.$$

ベルヌーイ多項式の導関数については

$$\begin{aligned}
B_n'(x)=&\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\binom{n}{k}B_kx^{n-k-1}\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!}B_kx^{n-k-1}\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}n\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}B_kx^{n-k-1}\\
=&n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}B_kx^{n-k-1}\\
=&nB_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

となるため，この両辺を積分することで

$$\int_x^{x+1}B_n(u)\mathrm{d}u=\frac{B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)}{n+1}=x^n$$

が成り立つ．また，ベルヌーイ多項式はベルヌーイ数の一般化ととらえることで，指数型母関数をも考えることができる．

そこで，以下の定理を示す．

**定理 2**

変数 $x\in\mathbb{R}$ により与えられる以下の $n$ 次の多項式 $B_{1,n}(x),B_{2,n}(x)$ はそれぞれ同値である．

1).

$$B_{1,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kx^{n-k}$$

2).

$$\int_x^{x+1}B_{2,n}(u)\mathrm{d}u=x^n$$

3).

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_{3,k}(x)\frac{t^k}{k!}$$

特に，3) はベルヌーイ多項式の指数型母関数である．

*Proof.*

1)→2) は導出より明らかである．2)→1) については $B_{2,n}(x)$ を係数 $C_0,C_1,\cdots,C_n$ を用いて

$$B_{2,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_kx^{n-k}$$

とあらわすことにより，

$$
\begin{aligned}
\int_x^{x+1} B_{2,n}(u)\mathrm{d}u =& x^n \\
\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1} C_k u^{n-k+1}\right]_x^{x+1} =& x^n \\
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1} C_k((x+1)^{n-k+1} - x^{n-k+1}) =& x^n \\
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n-k+1} C_k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k+1}{j} x^j =& x^n
\end{aligned}
$$

となるため，両辺の $x^l$ に関する係数比較により

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{n+1} C_0 \dbinom{n+1}{n} = 1 & (l=0) \\
\displaystyle\sum_{k=0}^{n-l} \frac{1}{n-k+1} C_k \binom{n-k+1}{l} = 0 & (other)
\end{cases}
$$

といった関係式が得られる．ここで，$l \neq 0$ の場合の関係式を変形すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-l} \frac{1}{n-k+1} C_k \binom{n-k+1}{l} =& 0 \\
\sum_{k=0}^{n-l} \frac{1}{n-k+1} C_k \frac{(n-k+1)!}{l!(n-k+1-l)!} \cdot \frac{(n-l+1)!}{(n-l+1)!} \cdot \frac{k!}{k!} =& 0 \\
\sum_{k=0}^{n-l} \frac{1}{n-k+1} C_k \frac{(n-l+1)!}{k!(n-k+1-l)!} \cdot \frac{(n-k+1)!}{(n-l+1)!} \cdot \frac{k!}{l!} =& 0 \\
\sum_{k=0}^{n-l} C_k \frac{(n-l+1)!}{k!(n-k+1-l)!} \cdot k!(n-k)! \cdot \frac{1}{l!(n-l+1)!} =& 0 \\
\sum_{k=0}^{n-l} C_k \frac{(n-l+1)!}{k!(n-k+1-l)!} \cdot k!(n-k)! =& 0 \\
\sum_{k=0}^{n-l} C_k \frac{(n-l+1)!}{k!(n-k+1-l)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} =& 0 \\
\sum_{k=0}^{n-l} \binom{n-l+1}{k} \frac{C_k}{\binom{n}{k}} =& 0
\end{aligned}
$$

となり，$l=0$ のときの関係式より $C_0 = 1$ が得られるためベルヌーイ数 $B_k$ により

$$
\begin{cases}
B_0 = C_0 = \dfrac{C_0}{\binom{n}{0}} & (k=0) \\
B_k = \dfrac{C_k}{\binom{n}{k}} & (other)
\end{cases}
$$

とあらわすことができる．これより，

$$
B_{2,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}
$$

となり，1) に一致する．

3)→1) についてはベルヌーイ数の母関数による定義より

$$\begin{aligned}\frac{te^{xt}}{e^t-1} &= \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(xt)^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n\right)\\ &=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+m}x^m}{m!n!}B_n.\end{aligned}$$

ここで，$k=m+n$ とおけば $m\geq 0$ より $n-m\geq 0$，つまり $k\geq n$ となるため

$$\begin{aligned}\frac{te^{xt}}{e^t-1} &=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{t^k x^{k-n}}{(k-n)!n!}B_n\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{(k-n)!n!}x^{k-n}B_n\frac{t^k}{k!}\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}B_{1,k}(x)\frac{t^k}{k!}\end{aligned}$$

となり，$B_{1,k}(x)=B_{3,k}(x)$ である．1)→3) について 3)→1) と逆の操作をすることで直ちに得られる．

よって，命題は証明された．

□

**定理 3**

ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ は以下の性質を満たす．

1).

$$B_n(0)=B_n$$

2).

$$B_n(1)=\begin{cases}-B_n(0) & (n=1)\\ B_n(0) & (other)\end{cases}$$

3).

$$\int_a^x B_n(u)\mathrm{d}u=\frac{B_{n+1}(x)-B_{n+1}(a)}{n+1}$$

4).

$$B_n'(x)=nB_{n-1}(x)$$

*Proof.*

1) と 3) と 4) については導出より明らかである．2) については 3) と定理 2 の 2) より $x=0$ で

$$\int_0^1 B_n(u)\mathrm{d}u=\frac{B_{n+1}(1)-B_{n+1}(0)}{n+1}=0^n=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (other)\end{cases}$$

となるため，$n\neq 0$ で

$$B_{n+1}(1)-B_{n+1}(0)=0\ \Rightarrow\ B_{n+1}(1)=B_{n+1}(0)$$

となり，$n=0$ で 1) を用いることで

$$B_1(1)-B_1=1\ \Rightarrow\ B_1(1)=1+B_1=-B_1=-B_1(0).$$

よって，命題は証明された．

□

ベルヌーイ数とベルヌーイ多項式は冪乗和の一般の公式を与えるために定義したものであるが，より一般の場合を考えると関数 $f(x)$ による

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

を考えることとなる．直接考えることは困難であるため，十分に滑らかな関数であれば

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \fallingdotseq \int_0^n f(x)\mathrm{d}x$$

と近似可能であることを基にして考える．まずは，シグマの中の 1 つ項 $f(k)$ について考える．このときの誤差項を $R(x)$ とすれば

$$\int_0^1 f(x+k-1)\mathrm{d}x = f(k) + R(x)$$

とあらわすことができる．$R(x)$ については部分積分により

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x+k-1)\mathrm{d}x =& [f(x+k-1)x]_0^1 - \int_0^1 f'(x+k-1)x\mathrm{d}x \\ =& f(k) - \int_0^1 f'(x+k-1)x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

とあらわされることから

$$R(x) = -\int_0^1 f'(x+k-1)x\mathrm{d}x.$$

ここで，$f(x)$ がベルヌーイの公式による総和 $S_k(x)$ のように $f(x)$ が有限の多項式であるとすれば，有限の $m$ 回の部分積分により $R(x)$ から積分項を除去することができる．また，部分積分により $x$ に関する多項式が生じるが，

$$\int_0^1 f(x+k-1)\mathrm{d}x = \int_0^1 B_0(x)f(x+k-1)\mathrm{d}x$$

とすれば定理 3 の 3) より一般の部分積分により生じる $x$ に関する多項式を考えることができる．つまり，

$$\int_0^1 f(x+k-1)\mathrm{d}x = \sum_{l=1}^{m}(-1)^{l+1}\left[\frac{B_l(x)}{l!}f^{(l-1)}(x+k-1)\right]_0^1 + (-1)^m\int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!}f^{(m)}(x+k-1)\mathrm{d}x$$

となり，$f(x)$ が有限の多項式であれば積分項は 0 となるということである．あとは，$k$ に関する総和を適用することにより

$$\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l+1}\left[\frac{B_l(x)}{l!}f^{(l-1)}(x+k-1)\right]_0^1 + (-1)^m\int_0^n \frac{B_m(x)}{m!}f^{(m)}(x+k-1)\mathrm{d}x.$$

また，この積分項は

$$R_m(x) = (-1)^{m+1}\int_0^n \frac{B_m(x-\lfloor x\rfloor)}{m!}f^{(m)}(x)\mathrm{d}x$$

とおくとする．定理 3 の 2) より $l \neq 1$ で $B_l(0) = B_l(1) = B_l$，系 1-1 よりベルヌーイ数の 1 を除く奇数項は 0 となるため

$$\begin{aligned}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x =& \sum_{k=1}^{n}[B_1(x)f(x+k-1)]_0^1 + \sum_{l=2}^{m}(-1)^{l+1}\frac{B_l}{l!}\sum_{k=1}^{n}\left[f^{(l-1)}(x+k-1)\right]_0^1 - R_m(x) \\ =& \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(f(k)+f(k-1)) - \sum_{l=2}^{m}(-1)^l\frac{B_l}{l!}\left[f^{(l-1)}(x)\right]_0^1 - R_m(x) \\ =& \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{1}{2}(f(n)+f(0)) - \sum_{l=2}^{m}\frac{B_{2l}}{(2l)!}\left[f^{(2l-1)}(x)\right]_0^1 - R_{2m}(x)\end{aligned}$$

とあらわすことができる．これより，

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(n) + f(0)) + \sum_{l=2}^{m} \frac{B_{2l}}{(2l)!} \left[f^{(2l-1)}(x)\right]_0^1 + R_{2m}(x)$$

となり，$R_{2m}(x)$ については

$$R_{2m}(x) = -\int_0^n \frac{B_{2m}(x - \lfloor x \rfloor)}{(2m)!} f^{(2m)}(x)\mathrm{d}x$$

のようになる．これを**オイラー・マクローリンの公式 (Euler-Maclaurin formula)** という．また，積分区間をより一般に

$$\sum_{k=a+1}^{b} f(k) \fallingdotseq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

とすることで

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=a+1}^{b} f(k) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(f(b) + f(a)) + \sum_{l=2}^{m} \frac{B_{2l}}{(2l)!} \left[f^{(2l-1)}(x)\right]_a^b + R_{2m,(a,b)}(x) \\ \displaystyle R_{2m,(a,b)}(x) = -\int_a^b \frac{B_{2m}(x - \lfloor x \rfloor)}{(2m)!} f^{(2m)}(x)\mathrm{d}x \end{cases}$$

とすることができる．これは例えば $f(x) = \log x$ としたときに $x = 0$ を区間にとる積分の計算が発散することから

$$\sum_{k=1}^{b} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{b} f(k)$$

とすることでオイラー・マクローリンの公式を適用することができるようにする．

## 3 周期ベルヌーイ多項式

ベルヌーイ多項式 $B_n(x)$ というのは $x$ に関する $n$ 次の多項式であるため，$k \in \mathbb{N}(0 \leq k \leq n)$ で $x^k$ がフーリエ級数展開可能であるならばベルヌーイ多項式を周期関数へと変換が可能である．

そこで，$k \geq 1$ として

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k & (0 \leq x < 2\pi) \\ f_k(x + 2\pi) & (other) \end{cases}$$

と定義された周期関数をフーリエ級数展開する．このとき，$f(x)$ は区分的に滑らかな関数であるためフーリエ級数は収束する．これより，$f(x)$ の複素フーリエ係数を計算する．

$$\begin{aligned} c_0 =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^k \mathrm{d}x = \frac{(2\pi)^k}{k+1} \\ c_n =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^k e^{-inx} \mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-in} \left[x^k e^{-inx}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{k}{-in} \int_0^{2\pi} x^{k-1} e^{-inx} \mathrm{d}x \\ =& \frac{(2\pi)^{k-1}}{-in} - \frac{(2\pi)^{k-2}}{(-in)^2} k + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{k(k-1)}{(-in)^2} \int_0^{2\pi} x^{k-2} e^{-inx} \mathrm{d}x \\ =& \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+1} \frac{(2\pi)^{k-l}}{(-in)^l} \cdot \frac{k!}{(k+1-l)!} \\ =& -\frac{k!}{(in)^k} \sum_{l=1}^{k} \frac{(2\pi in)^{k-l}}{(k+1-l)!} \end{aligned}$$

このフーリエ級数を用いることで

$$f_k(x)=\frac{(2\pi)^k}{k+1}-\sum_{n\neq0}\frac{k!}{(in)^k}\sum_{l=1}^{k}\frac{(2\pi in)^{k-l}}{(k+1-l)!}e^{inx}$$

とフーリエ級数展開される．よって，

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}f_k(x)$$

と定義される $P_n(x)$ が周期 $2\pi$ の周期ベルヌーイ多項式となるが，あまりにも複雑である．そこで，ベルヌーイ多項式の指数型母関数

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)\frac{t^k}{k!}\quad(0\leq x<2\pi)$$

より $t$ の冪乗に関する係数比較をすることにより周期ベルヌーイ多項式を導出することを考える．まず，

$$\frac{f_k(x)}{k!(2\pi)^k}=\frac{1}{(k+1)!}-\sum_{n\neq0}\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{inx}}{(k+1-l)!(2\pi in)^l}$$

のように周期と冪指数に関する正規化を行い，$0\leq x<2\pi$ であることから $f_k(x)=x^k$ として，$k\geq1$ であることに留意して直接ベルヌーイ多項式の指数型母関数を構築する．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k(x)t^{k+1}}{k!(2\pi)^k}=&\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}-\sum_{n\neq0}\sum_{l=1}^{k}\frac{e^{inx}t^{k+1}}{(k+1-l)!(2\pi in)^l}\right)\\
t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^kt^k}{k!(2\pi)^k}=&e^t-1-t-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\neq0}\frac{e^{inx}t^l}{(2\pi in)^l}\sum_{l=1}^{k}\frac{t^{k+1-l}}{(k+1-l)!}\\
t\left(e^{\frac{x}{2\pi}}-1\right)=&e^t-1-t-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\neq0}\frac{e^{inx}t^l}{(2\pi in)^l}\sum_{l=1}^{k}\frac{t^{k+1-l}}{(k+1-l)!}
\end{aligned}$$

ここで，シグマの $k$ と $l$ の添え字の入れ替えを考えると，$l\leq k$ かつ $1\leq k<\infty,1\leq l<\infty$ であるため

$$\begin{aligned}
t\left(e^{\frac{x}{2\pi}}-1\right)=&e^t-1-t-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n\neq0}\frac{e^{inx}t^l}{(2\pi in)^l}\sum_{k=l}^{\infty}\frac{t^{k+1-l}}{(k+1-l)!}\\
te^{\frac{x}{2\pi}}=&e^t-1-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n\neq0}\frac{e^{inx}t^l}{(2\pi in)^l}(e^t-1)\\
\frac{te^{\frac{x}{2\pi}}}{e^t-1}=&1-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n\neq0}\frac{e^{inx}t^l}{(2\pi in)^l}\\
\sum_{l=1}^{\infty}P_l\left(\frac{x}{2\pi}\right)\frac{t^l}{l!}=&-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n\neq0}\frac{e^{inx}t^l}{(2\pi in)^l}.
\end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{cases}P_k(x)=1 & (k=0)\\ P_k(x)=-k!\displaystyle\sum_{n\neq0}\frac{e^{2\pi inx}}{(2\pi in)^k} & (other)\end{cases}$$

のような周期 1 の周期ベルヌーイ多項式 $P_k(x)$ が得られた．

次に，$k\geq1$ で周期ベルヌーイ多項式から虚数を除去する方法を考える．オイラーの公式より

$$e^{\pm2\pi inx}=\cos2\pi nx\pm i\sin2\pi nx$$

となることから

$$\begin{aligned} P_k(x) &= -\, k! \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i n x}}{(2\pi i n)^k} \\ &= -\, k! \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{e^{2\pi i n x}}{(2\pi i n)^k} - \frac{e^{2\pi i n x}}{(2\pi i n)^k} \right) \\ &= -\, k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i n)^k} \left( (1 + (-1)^k) \cos 2\pi n x + i(1 - (-1)^k) \sin 2\pi n x \right). \end{aligned}$$

これより，$k$ が 4 の周期で

$$\begin{cases} P_{4k} = -(4k)! \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^{4k}} \\ P_{4k+1} = -(4k+1)! \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^{4k+1}} \\ P_{4k+2} = (4k+2)! \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos 2\pi n x}{(2\pi n)^{4k+2}} \\ P_{4k+3} = (4k+3)! \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin 2\pi n x}{(2\pi n)^{4k+3}} \end{cases}$$

のように記述することができる．また，

$$\begin{cases} \sin 2\pi n x = \cos \left( 2\pi n x - \dfrac{\pi}{2} \right) \\ -\cos 2\pi n x = \cos (2\pi n x - \pi) \\ -\sin 2\pi n x = \cos \left( 2\pi n x - \dfrac{3}{2}\pi \right) \\ \cos 2\pi n x = \cos (2\pi n x - 2\pi) \end{cases}$$

となることから

$$P_k(x) = -k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos \left( 2\pi n x - \frac{k}{2}\pi \right)}{(2\pi n)^k}$$

のように 1 つの式であらわすことも可能である．

## 4　リーマンのゼータ関数との関係

**定義 3**

$s \in \mathbb{C}$ により

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と定義される関数 $\zeta(s)$ を**リーマンのゼータ関数 (Riemann's zeta function)** という．

ベルヌーイ数とリーマンのゼータ関数の関係について以下の定理が成り立つ．

**定理 4**

$n \in \mathbb{N}$ により

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}$$

が成り立つ．

*Proof.*

$z \in \mathbb{C}(|z|<1)$ で余接の部分分数分解より

$$
\begin{aligned}
\pi z \cot \pi z =& 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - k^2} \\
=& 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{2z^2}{k^2}}{1 - \frac{z^2}{k^2}} \\
=& 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z^2}{k^2} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{z^2}{k^2}\right)^{l-1} \\
=& 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^{2l}}{k^{2l}} \\
=& 1 - 2 \sum_{l=1}^{\infty} z^{2l} \zeta(2l).
\end{aligned}
$$

また，双曲線余接のテイラー展開は系 1-1 の証明で与えた $g(x)$ を用いることで

$$
z \coth z = z \frac{\cosh z}{\sinh z} = z \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = z \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} = g(2z)
$$

となるため

$$
z \coth z = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2z)^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2z)^{2k}.
$$

余接と双曲線余接の間には

$$
\coth z = \frac{\cos iz}{-i \sin iz} = i \cot iz \ \Rightarrow iz \coth iz = iz \frac{\cos z}{i \sin z} = z \cot z
$$

といった関係があるため，

$$
\pi z \cot \pi z = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2i\pi z)^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2\pi z)^{2k}
$$

となり，部分分数分解による表示との $z$ の冪乗に関する係数比較を行うことにより

$$
-2\zeta(2n) = (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2i\pi z)^{2n} (2\pi)^{2n} \ \Rightarrow \ \zeta(2n) = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}.
$$

よって，命題は証明された．

□

**補題 1**

$$
\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \mathrm{d}t
$$

*Proof.*

ガンマ関数との積をとると

$$
\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} t^{s-1} e^{-t} \mathrm{d}t
$$

となるが，$t = nx$ と変数変換をすることにより

$$
\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} (nx)^{s-1} e^{-nx} n \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \mathrm{d}x.
$$

$x > 0$ かつ $n \geq 0$ より $e^{-nx} < 1$ となるためテイラー展開により

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right)\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^{s-1}\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\mathrm{d}x.$$

よって，命題は証明された．

□

**定理 5**

$n \in \mathbb{N}(n \geq 1)$ により

$$\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}$$

が成り立つ．これは，$\zeta(s)$ における解析接続について $s$ が負の偶数であるときは 0 になることを示しており，これをリーマンのゼータ関数における**自明な零点**という．

*Proof.*

補題 1 よりリーマンゼータ関数とガンマ関数の積は

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\mathrm{d}t$$

とあらわすことが可能である．左辺の右項は $\mathbb{C}$ 全域で正則であり，ガンマ関数は $-n$ で 1 位の極をもつため

$$\zeta(-n) = \lim_{s \to -n} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\mathrm{d}t.$$

また，ベルヌーイ数の母関数により

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}\sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!}t^k\right)t^{s-1}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{t}\sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!}t^k t^{s-1}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!}t^{k+s-2}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{B_k}{k!(k+s-1)}
\end{aligned}$$

となり，$-n$ で 1 位の極をとることがわかり，

$$\mathrm{Res}_{s=-n}\zeta(s)\Gamma(s) = \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}.$$

また，

$$\mathrm{Res}_{s=-n}\Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

であるため

$$\zeta(-n) = \frac{\mathrm{Res}_{s=-n}\zeta(s)\Gamma(s)}{\mathrm{Res}_{s=-n}\Gamma(s)} = (-1)^n n! \cdot \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}.$$

仮定および系 1-1 より

$$(-1)^n B_{n+1} = \begin{cases} 0 & (n\ is\ even) \\ -B_{n+1} & (n\ is\ odd) \end{cases}$$

であるため

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}.$$

よって，命題は証明された．

□

定理 4 より，ベルヌーイ数 $B_n$ について

$$B_{2n} = (-1)^{n-1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\zeta(2n)$$

といった無限級数による定義が与えられる．これより，$\zeta(2n)$ の表現に応じて $B_{2n}$ が様々な表現をもつこととなる．また，周期 1 の周期ベルヌーイ多項式 $P_k(x)$ に対して $x$ に 0 を代入することにより

$$P_{2k}(0) = B_{2k} = -(2k)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cos(-k\pi)}{(2\pi n)^{2k}} = -(-1)^k\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k)$$

のようになり，同じ等式が得られる．

次に，リーマンのゼータ関数をベルヌーイ数を含まないような解析接続をすることで，ベルヌーイ数の別の表現の一例を与える．なお，定理 5 の表現についてはリーマンのゼータ関数の解析接続により与えられるベルヌーイ数の表現であるため，同様にしてリーマンのゼータ関数の解析接続を考える．

そこで，まずは以下の定義を与える．

**定義 4**

$s \in \mathbb{C}$ により

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

と定義される関数 $\eta(s)$ を**ディリクレのイータ関数 (Dirichlet's eta function)** という．

ディリクレのイータ関数 $\eta(s)$ は

$$\eta(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

のような交代級数であるため，リーマンのゼータ関数から交代級数を生成することで

$$\zeta(s) - 2\cdot 2^{-s}\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \eta(s)$$

のようなディリクレのイータ関数との関係が得られる．これより，ディリクレのイータ関数を解析接続する．

まずは，交代級数に関する以下の補題および定理を与える．

**補題 2**　数列 $\{a_n\}$ について，差分演算子を

$$\begin{cases} \Delta^0 a_n = a_n & (k=0) \\ \Delta^{k+1} a_n = \Delta^k a_{n+1} - \Delta^k a_n & (other) \end{cases}$$

としたとき，

$$\Delta^k a_n = (-1)^k\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}a_{n+m}.$$

*Proof.*

$k$ に関する数学的帰納法により証明をする．$k=1$ のときは明らかであるため，$k$ のときに成り立つことを仮定して $k+1$ で成り立つことを示す．数学的帰納法の仮定を用いることで

$$\begin{aligned}
\Delta^{k+1}a_n =& \Delta^k a_{n+1} - \Delta^k a_n \\
=& (-1)^k\left(\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}a_{n+1+m} - \sum_{m=0}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}a_{n+m}\right) \\
=& (-1)^k\left((-1)^k a_{n+1+k} + \sum_{m=1}^{k}(-1)^{m+1}\binom{k}{m-1}a_{n+m} - \sum_{m=1}^{k}(-1)^m\binom{k}{m}a_{n+m} - a_n\right) \\
=& (-1)^k\left(-a_n - \sum_{m=1}^{k}(-1)^m\left(\binom{k}{m-1}+\binom{k}{m}\right)a_{n+m} + (-1)^k a_{n+1+k}\right)
\end{aligned}$$

となり，ここで二項係数の関係式を用いれば

$$
\begin{aligned}
\Delta^{k+1}a_n =&(-1)^{k+1}\left(a_n - \sum_{m=1}^{k}(-1)^m\binom{k+1}{m}a_{n+m} - (-1)^k a_{n+1+k}\right)\\
=&(-1)^{k+1}\sum_{m=0}^{k+1}(-1)^m\binom{k+1}{m}a_{n+m}
\end{aligned}
$$

となり，$k+1$ における関係式が得られた．

よって，命題は証明された．

□

**定理 6　オイラー変換**

数列 $\{a_n\}$ について，差分演算子を

$$
\begin{cases}
\Delta^0 a_n = a_n & (k=0)\\
\Delta^{k+1}a_n = \Delta^k a_{n+1} - \Delta^k a_n & (other)
\end{cases}
$$

としたとき，

$$
\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \Delta^n a_0
$$

が成り立つ．これを**オイラー変換 (Euler transform)** という．また，変数 $x$ による冪級数であれば

$$
\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k x^k = \frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^n \Delta^n a_0
$$

が成り立ち，これは一般化されたオイラー変換である．

*Proof.*

$x_k t^k$ に対するシフト作用素を $S : a_k x^k \mapsto a_{k+1}x^{k+1}$ のように定義すれば，$S$ は明らかに線型差要素であるため

$$
\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^k(a_0 x^0)
$$

とあらわすことができる．シフト作用素と差分演算子の関係を考えると，$\Delta$ は $\{a_k\}$ のみに作用するため

$$
\Delta(a_k x^k) = a_{k+1}x^k - a_k x^k = \frac{1}{x}S(a_k x^k) - a_k x^k
$$

とあらわすことができる．このとき，シフト作用素と差分演算子の関係を形式的に記述すると

$$
\Delta = \frac{1}{x}S - S^0 \Leftrightarrow \ S = x(\Delta + S^0)
$$

となるため，これを元の級数に対して適用すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k S^k(a_0 x^0) =&(S_0 + S)^{-1}a_0\\
=&(S_0 + x(\Delta + S^0))^{-1}(a_0 x^0)\\
=&((1+x)S_0 + x\Delta)^{-1}(a_0 x^0)\\
=&\frac{1}{1+x}\left(S_0 + \frac{x}{1+x}\Delta\right)^{-1}a_0\\
=&\frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{1+x}\Delta\right)^n a_0\\
=&\frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^n \Delta^n a_0
\end{aligned}
$$

となり，オイラー変換が得られる．

次に，この形式的表現の操作の正当性を評価する．まず，多項式に対するシフト作用素 $S$ は $a_0x^0$ にのみ作用するという仮定をすれば

$$\left.\left(\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{l=0}^{\infty}a_lx^lt^l\right)\right)\right|_{t=0}=a_kx^k$$

とあらわすことが可能であることから $t\to 0$ をする仮定のもとで

$$S^k=\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

と表現される．また，$t$ に関する冪級数を

$$f(t)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lx^lt^l$$

のようにあらわすとする．このとき，シフト作用素には自然に演算は定義されるが，

$$S^mS^n(f(t))$$

のような操作は $t\to 0$ としたときに正しさを失うため，

$$S^{m+n}(f(t))$$

のように $f(t)$ に対してシフト作用素の適用は 1 度のみである制約が必要となる．差分演算子 $\Delta$ については形式的議論と同様にして

$$\Delta=\frac{1}{x}S-1$$

とあらわすことができ，高階の場合では $k$ で

$$\Delta^k=\left(\frac{1}{x}S-1\right)^k$$

とあらわされることを仮定したとき

$$\Delta^{k+1}=\frac{1}{x}S\Delta^k-\Delta^k=\left(\frac{1}{x}S-1\right)\Delta^k=\left(\frac{1}{x}S-1\right)^{k+1}$$

となるため，数学的帰納法により高階の差分演算子はシフト作用素を含む式の冪乗としてあらわすことができる．この結果をオイラー変換に対して適用すれば

$$\frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^n\Delta^na_0\ \Rightarrow\ \left.\left(\frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^n\Delta^n(f(t))\right)\right|_{t=0}$$

のようになり，$\Delta^n$ と $f(t)$ を切り離して考えることができるようになる．これより

$$\frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^n\Delta^n=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kS^k$$

を証明する．二項定理より

$$\begin{aligned}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^n\Delta^n&=\left(\frac{-x}{1+x}\right)^n\left(\frac{1}{x}S-1\right)^n\\&=\left(\frac{-1}{1+x}\right)^n(S-x)^n\\&=\left(\frac{-1}{1+x}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}S^m(-x)^{n-m}\\&=\left(\frac{1}{1+x}\right)^n\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(-S)^mx^{n-m}\end{aligned}$$

となるため，元の級数について $-S$ の冪乗について書き下すと

$$\begin{aligned}(-S)^0 &: \left(\frac{1}{1+x}\right)^0\binom{0}{0}x^0+\left(\frac{1}{1+x}\right)^1\binom{1}{0}x^1+\cdots\\ (-S)^1 &: \left(\frac{1}{1+x}\right)^1\binom{1}{1}x^0+\left(\frac{1}{1+x}\right)^2\binom{2}{1}x^1+\cdots\\ (-S)^2 &: \left(\frac{1}{1+x}\right)^2\binom{2}{2}x^0+\left(\frac{1}{1+x}\right)^3\binom{3}{2}x^1+\cdots\\ &\vdots\end{aligned}$$

となるため，

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^n\Delta^n =&\frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-S}{1+x}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^n\binom{n+k}{n}x^n\\ =&\frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-S}{1+x}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n\end{aligned}$$

が得られる．これに対してニュートンの一般二項定理を適用すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^n\Delta^n =&\frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-S}{1+x}\right)^k\frac{1}{\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}}\\ =&\frac{1}{1+x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-S}{1+x}\right)^k\frac{1}{\left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}}\\ =&\sum_{k=0}^{\infty}(-S)^k.\end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

これより，以下の系が得られる．

**系 6-1**　数列 $\{a_n\}$ について

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k x^k=\frac{1}{1+x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}a_m.$$

*Proof.*
補題 2 と定理 6 より明らかである．

□

また，定理 6 で用いた微分による差分演算子の関係および二項定理より

$$\Delta^n f(t)=\left(\frac{1}{x}S-1\right)^n f(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{1}{x^k}S^k f(t)=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sum_{l=0}^{\infty}a_{l+k}x^l t^l$$

となるため，$t\to 0$ および $x=1$ とすることで補題 2 がただちに得られる．
ディリクレのイータ関数をオイラー変換すると

$$\begin{aligned}\eta(s)=&\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{m}\frac{1}{(m+1)^s}\\ =&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(-1)^m}{(m+1)^s}\end{aligned}$$

となり，リーマンのゼータ関数との関係より

$$(1-2^{1-s})\zeta(s)=\eta(s) \ \Rightarrow \zeta(s)=\frac{1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(-1)^m}{(m+1)^s}$$

とあらわすことができる．そして，定理 4 によるベルヌーイ数との関係に対して代入すれば

$$\begin{aligned}B_{2k}=&(-1)^{k-1}\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\frac{1}{1-2^{1-2k}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(-1)^m}{(m+1)^{2k}}\\=&\frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\frac{(-1)^{k-1}}{1-2^{1-2k}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(-1)^m}{(m+1)^{2k}}\end{aligned}$$

のような表現が得られる．定理 5 に対しても同様にして

$$\begin{aligned}B_{2k}=&-2k\zeta(1-2k)\\=&-2k\frac{1}{1-2^{1-(1-2k)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(-1)^m}{(m+1)^{1-2k}}\\=&-\frac{k}{1-2^{2k}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(-1)^m}{(m+1)^{1-2k}}.\end{aligned}$$