-包絡線-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2019 年 3 月 24 日
最終更新 2019 年 3 月 28 日

1　包絡線

変数 $x, y, t \in \mathbb{R}$ で t を xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の曲線群の助変数とする $f(x, y, t) = 0$ を与えたとする．このとき，f 全てに接するような曲線 $g(x, y) = 0$ について考える．g が存在すると仮定すれば，それは f 上に存在する曲線であるため $f(x(t), y(t), t) = 0$ と考えることができ，$(x(t), y(t))$ の接線

$$\boldsymbol{t} = (x'(t), y'(t))$$

は $g(x, y) = 0$ の接線ベクトルである．また，f の法線ベクトルは ∇f と与えられるため法線ベクトル

$$\boldsymbol{n} = \nabla f = (f_x, f_y)$$

を定義することができる．曲線群の法線と接線は直交するため

$$\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} = f_x x'(t) + f_y y'(t) = 0$$

といった関係式が得られる．

ここで，f を t で微分すると連鎖律より

$$f_x x'(t) + f_y y'(t) + f_t = 0 \;\Rightarrow\; f_t = 0.$$

つまり，f 全てに接する曲線が存在するならば

$$\begin{cases} f(x, y, t) = 0 \\ f_t(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

を連立して t を除去したときの式が f 全てに接する曲線を示す式となる．また，これをより一般に，f 全てと角度 θ で交わる場合については，3 次元以上では曲線に対する法線が無限に存在するため考えることはできない．$\theta = 0$ に限り全ての法線と直交するという条件が得られるため考えることができる．これと同様の議論をすることにより，容易に多次元へと拡張される．

ここで，このことについての定義を与える．

定義 1

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ で t を $\boldsymbol{x}$ 空間 $\mathbb{R}^n$ 上の曲線群の助変数とする $f(\boldsymbol{x}, t) = 0$ による陰関数を与えたとする．このとき，f 全てに接するような曲線を**包絡線 (envelope)** といい，包絡線が存在するならば

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{x}, t) = 0 \\ f_t(\boldsymbol{x}, t) = 0 \end{cases}$$

を連立して t を除去して得られる曲線が包絡線となる．

また，包絡線を多次元化するにあたって，n 次元曲面群による n 次元包絡曲面を考えることができる．$n<m$ として，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{t}$ を $\boldsymbol{x}$ 空間 $\mathbb{R}^m$ 上の n 次元曲面群の助変数とする $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=0$ を与えたとする．このとき，F 全てに接するような n 次元包絡曲面 $G(\boldsymbol{x})=0$ が存在すると仮定すれば，それは F 上に存在する n 次元曲面であるため，$F(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t})=0$ と考えることができ，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ の接線は $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ とすることで

$$\begin{cases}\boldsymbol{t}_1=\boldsymbol{x}_{t_1}(\boldsymbol{t})\\ \boldsymbol{t}_2=\boldsymbol{x}_{t_2}(\boldsymbol{t})\\ \vdots\\ \boldsymbol{t}_n=\boldsymbol{x}_{t_n}(\boldsymbol{t})\end{cases}$$

と与えられる．また，F の法線は $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ とすることで

$$\boldsymbol{n}=\nabla F=(F_{x_1},F_{x_2},\cdots,F_{x_m})$$

となり，$\boldsymbol{t}_k$ と $\boldsymbol{n}$ が直交することから

$$\begin{cases}\boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{n}=F_{x_1}x_{1,t_1}+F_{x_2}x_{2,t_1}\cdots F_{x_m}x_{m,t_1}=0\\ \boldsymbol{t}_2\cdot\boldsymbol{n}=F_{x_1}x_{1,t_2}+F_{x_2}x_{2,t_2}\cdots F_{x_m}x_{m,t_2}=0\\ \vdots\\ \boldsymbol{t}_n\cdot\boldsymbol{n}=F_{x_1}x_{1,t_n}+F_{x_2}x_{2,t_n}\cdots F_{x_m}x_{m,t_n}=0.\end{cases}$$

また，F を $t_1,t_2,\cdots,t_n$ で微分すると連鎖律より

$$\begin{cases}F_{x_1}x_{1,t_1}+F_{x_2}x_{2,t_1}\cdots F_{x_m}x_{m,t_1}+F_{t_1}=0\ \Rightarrow\ F_{t_1}=0\\ F_{x_1}x_{1,t_2}+F_{x_2}x_{2,t_2}\cdots F_{x_m}x_{m,t_2}+F_{t_2}=0\ \Rightarrow\ F_{t_2}=0\\ \vdots\\ F_{x_1}x_{1,t_n}+F_{x_2}x_{2,t_n}\cdots F_{x_m}x_{m,t_n}+F_{t_n}=0\ \Rightarrow\ F_{t_n}=0\end{cases}$$

となるため，n 次元包絡曲面が存在するならば

$$\begin{cases}F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=0\\ F_{t_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=0\\ F_{t_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=0\\ \vdots\\ F_{t_n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=0\end{cases}$$

を連立して $\boldsymbol{t}$ を除去することにより n 次元包絡曲面が得られる．

2　ルジャンドル変換

曲線群から包絡線を得ることができる場合があるが，逆に包絡線から曲線群を得ることができれば，曲線群と包絡線間で一対一の対応関係が得られると考えられる．

変数 $x\in\mathbb{R}$ により関数 $y=f(x)\in\mathbb{R}$ の場合について考える．f の接線が包絡線の接線に対応することから，x に対する接線の傾き $f'(x)$ が x と y を固定して考えた場合における曲線群の接線となる．このとき，この接線の方程式は適当な $t\in\mathbb{R}$ を用いて

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)\ \Rightarrow\ y-f(t)-f'(t)(x-t)=0$$

とすることができ，これを $g(x,y,t)=0$ とする．このとき，g は t を助変数とする xy 平面 $\mathbb{R}^2$ における $f(x)$ を包絡線とする曲線群となる．しかし，これではこれ以上の考察をすることができない．

そこで，任意の接線は切片と傾きの 2 つの要素から一意に構成することが可能であることから，切片と傾き

の順序対を $(b, f'(x)) \in \mathbb{R}^2$ として $(x, f'(x)) \to (b, f'(x))$ とすることを考える．接線の傾きというのは，切片の座標から接線と $f(x)$ の接点までの平均変化率に等しいが，$f'(x)$ とは符号が異なる場合がある．そこで，$f(x)$ が凸関数であるという仮定を与えることにより，$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ のときの x を x_0 として，$x \geq 0$ とすれば

$$\forall x \in \mathbb{R}(x \leq x_0)\ s.t.\ b \leq f(x), 0 \leq f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}(x_0 \leq x)\ s.t.\ f(x) \leq b, f'(x) \leq 0$$

となり，$x < 0$ のときは b と $f(x)$ の関係式の不等号が逆転する．つまり，

$$f'(x) = \frac{f(x) - b}{x - 0} \ \Leftrightarrow\ f'(x)x = f(x) - b$$

となり，$f'(x)$ を新たな変数 p として定義し，$-b$ についての関数として f の関数変換 $\mathcal{L} : f \to f^*$ を

$$f^*(p) = px - f(x)$$

と定義する．このとき，$f^*(p)$ を微分すると

$$f'^*(p) = x$$

となることから

$$\begin{cases} f'(x) = p \\ f'^*(p) = x \end{cases}$$

といった双対関係が成り立つ．

また，$\mathcal{L} : f^* \to f^{**}$ を考え，f^{**} の変数を $x = f'^*(p)$ とすることで

$$f^{**}(x) = xp - f^*(p) = xp - (px - f(x)) = f(x)$$

となり，双対関係が得られる．

次に，f が凹関数であると仮定して同様のことを考える．$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ のときの x を x_0 として，$x \geq 0$ とすれば

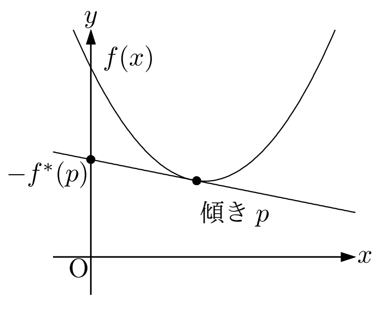
$$\forall x \in \mathbb{R}(x \leq x_0)\ s.t.\ f(x) \leq b, f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}(x_0 \leq x)\ s.t.\ b \leq f(x), 0 \leq f'(x)$$

となり，$x < 0$ のときは b と $f(x)$ の関係式の不等号が逆転する．つまり，

$$f'(x) = \frac{f(x) - b}{x - 0} \ \Leftrightarrow\ f'(x)x = f(x) - b$$

となることから，凸関数と同様の関数変換 $\mathcal{L}$ を定義することができる．

この関数変換を図で示すと



のような対応関係になる．また，この図のように f と接線を厳密に対応させるならば

$$\begin{aligned} \inf_{x\in\mathbb{R}}(f(x) - (px - f^*(p))) &= 0 \\ f^*(p) = -\inf_{x\in\mathbb{R}}(f(x) - px) &= \sup_{x\in\mathbb{R}}(f(x) - px) \end{aligned}$$

というように $\mathcal{L}$ を与えることができる．

ここで，この関数変換について以下の定義を与える．

定義 2

　変数 $x \in \mathbb{R}$ による関数 $y = f(x) \in \mathbb{R}$ について，関数変換 $\mathcal{L} : f \to f^*$ を $p \in \mathbb{R}$ を用いて

$$f^*(p) = px - f(x)$$

と与えたとき，$\mathcal{L}$ を**ルジャンドル変換 (Legendre transformation)** という．また，

$$f^*(p) = -\inf_{x \in \mathbb{R}}(px - f(x)) = \sup_{x \in \mathbb{R}}(px - f(x))$$

のような定義を用いる場合もある．

　特に，f が凹関数か凸関数であるならば

$$\begin{cases} \mathcal{L} \circ \mathcal{L} = \mathrm{id}_f \\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = p \\ \dfrac{\mathrm{d}f^*}{\mathrm{d}p} = x \end{cases}$$

といった双対関係が成り立つ．多変数関数に対してルジャンドル変換をするならば，対応させる各々の変数についてルジャンドル変換をすることで達成することができる．