-高速フーリエ変換-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2020 年 1 月 31 日
最終更新 2020 年 2 月 2 日

1　高速フーリエ変換

離散フーリエ変換の効率化について考える．まず，離散系の列 f が N 個の部分列 $\{f[0], f[1], \cdots, f[n-1]\}$ により周期的にあらわされるとする．このとき，離散フーリエ変換 $\mathcal{F}_N : f \to F$ は

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}.$$

また，離散フーリエ逆変換 $\mathcal{F}_N^{-1} : F \to f$ は

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{i\frac{2\pi kn}{N}}$$

となるが，

$$f[n] = f^{**}[n] = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} F^*[k] e^{-i\frac{2\pi kn}{N}} \right)^*$$

となるため，離散フーリエ逆変換と離散フーリエ変換は同一視することができる．つまり，効率化については離散フーリエ変換についてのみで十分である．このときのそれぞれの計算量は $O(N^2)$ である．

天下り的ではあるが，N が 2 の冪乗数であるときに，特に効率化が可能となる．まず，簡易化のために $\zeta_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ とおく．$N = 2^1$ のときであれば，離散フーリエ変換は

$$\begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_2^0 & \zeta_2^0 \\ \zeta_2^0 & \zeta_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \end{pmatrix}$$

とあらわされる．また，離散フーリエ変換の表現行列 $\mathcal{F}_N$ とあらわすこととする．次に，$N = 2^2$ のときであれば

$$\begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^0 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^1 & \zeta_4^2 & \zeta_4^3 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^2 & \zeta_4^4 & \zeta_4^6 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^3 & \zeta_4^6 & \zeta_4^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{pmatrix}$$

となるが，ζ_N の周期性より

$$\zeta_N^{\frac{N}{2}+k} = -\zeta_N^k, \quad \zeta_N^{N+k} = \zeta_N^k$$

が成り立つため

$$\begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^0 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^1 & \zeta_4^2 & \zeta_4^3 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^2 & \zeta_4^0 & \zeta_4^2 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^3 & \zeta_4^2 & \zeta_4^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{pmatrix}.$$

ここで，行列の $f[1]$ と $f[2]$ を入れ替えると

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix} \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^0 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^2 & \zeta_4^1 & \zeta_4^3 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^2 & \zeta_4^2 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^2 & \zeta_4^3 & \zeta_4^1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f[0] \\ f[2] \\ f[1] \\ f[3] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^0\zeta_4^0 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^2 & \zeta_4^1 & \zeta_4^1\zeta_4^2 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^2 & \zeta_4^2\zeta_4^0 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^2 & \zeta_4^3 & \zeta_4^3\zeta_4^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f[0] \\ f[2] \\ f[1] \\ f[3] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \zeta_4^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \zeta_4^1 \\ 1 & 0 & \zeta_4^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \zeta_4^3 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \zeta_4^0 & \zeta_4^0 & 0 & 0 \\ \zeta_4^0 & \zeta_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^0 \\ 0 & 0 & \zeta_4^0 & \zeta_4^2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f[0] \\ f[2] \\ f[1] \\ f[3] \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるが，ここで 2×2 のブロック行列による分解を考えれば

$$
\begin{pmatrix} F[0] \\ F[1] \\ F[2] \\ F[3] \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \zeta_4^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \zeta_4^1 \\ 1 & 0 & -\zeta_4^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\zeta_4^1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathcal{F}_2 & O_2 \\ O_2 & \mathcal{F}_2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f[0] \\ f[2] \\ f[1] \\ f[3] \end{pmatrix} \quad .
$$

これは，表現行列 $\mathcal{F}_4$ が $\mathcal{F}_2$ を用いて表現できることを示している．また，$\mathcal{F}_4$ の左側の行列を 2×2 のブロック行列により

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \zeta_4^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \zeta_4^1 \\ 1 & 0 & -\zeta_4^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\zeta_4^1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} I_2 & Z_{4,\pi} \\ I_2 & -Z_{4,\pi} \end{pmatrix}
$$

のように平行移動と双方向の回転と表現することができる．

このようは表現が一般に成り立つとすれば，$N = 2^{n+1}$ における表現行列は

$$
\mathcal{F}_{2^{n+1}} = \begin{pmatrix} I_{2^n} & Z_{2^{n+1},\pi} \\ I_{2^n} & -Z_{2^{n+1},\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{2^n} & O_{2^n} \\ O_{2^n} & \mathcal{F}_{2^n} \end{pmatrix}
$$

となると考えられる．また，$N = 2^2$ では $\mathcal{F}_4$ を作用させる列を

$$
\{f[0], f[1], f[2], f[3]\} \ \Rightarrow \ \{f[0], f[2], f[1], f[3]\}
$$

ように入れ替えていたが，これを一般に考えると，0 を基準として列の偶数番目と奇数番目の要素に再帰的に分割し並び替えていると考えられる．例えば，$N = 2^3$ では

$$
\begin{aligned}
\{f[0], f[1], f[2], f[3], f[4], f[5], f[6], f[7]\} &\Rightarrow \{\{f[0], f[2], f[4], f[6]\}, \{f[1], f[3], f[5], f[7]\}\} \\
&\Rightarrow \{\{\{f[0], f[4]\}, \{f[2], f[6]\}\}, \{\{f[1], f[5]\}, \{f[3], f[7]\}\}\} \\
&\Rightarrow \{f[0], f[4], f[2], f[6], f[1], f[5], f[3], f[7]\}
\end{aligned}
$$

のようになる．

そこで，以下の定理を与える．

定理 1

離散系の列 f が 2^m 個の部分列 $\{f[0], f[1], \cdots, f[2^m - 1]\}$ により周期的にあらわされるとする．このとき，f を再帰的に偶数番目と奇数番目に分解して並び替えたものを置換 σ_{2^m} により $\sigma_{2^m}(f)$ とあらわすとする．また，$\zeta_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ として $Z_{2^m,\pi}$ を

$$
Z_{2^m,\pi} = \begin{pmatrix} \zeta_{2^m}^0 & & & 0 \\ & \zeta_{2^m}^1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \zeta_{2^m}^{2^{m-1}-1} \end{pmatrix}
$$

とあらわすとすれば，漸化式

$$\begin{cases} \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{F}_{2^{m+1}} = \begin{pmatrix} I_{2^m} & Z_{2^{m+1},\pi} \\ I_{2^m} & -Z_{2^{m+1},\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{2^m} & O_{2^m} \\ O_{2^m} & \mathcal{F}_{2^m} \end{pmatrix} \end{cases}$$

により与えられる行列による $\mathcal{F}_{2^m}\sigma(f)$ は離散フーリエ変換に一致する．つまり，離散フーリエ変換 $\mathcal{F}: f \to F$ で

$$(\mathcal{F}_{2^m}\sigma_{2^m}(f))[k] = \sum_{n=0}^{2^m-1} f[n]\zeta_{2^m}^{kn}$$

が成り立つ．これを**高速フーリエ変換 (fast Fourier transform)** もしくは頭文字をとって **FFT** という．

Proof.

m に関する数学的帰納法により示す．$m=1$ および $m=2$ では成り立つことが導出より与えられているため，m で成り立つことを仮定して $m+1$ で成り立つことを示す．

f を順序を保ったまま偶数項 f_e と奇数項 f_o に分割すれば，σ_{2^m} が再帰的分割により定義されることから

$$\sigma_{2^{m+1}}(f) = \{\sigma_{2^m}(f_e), \sigma_{2^m}(f_o)\}.$$

これより，$\sigma_{2^{m+1}}(f)$ に対して $\mathcal{F}_{2^{n+1}}$ を適用することを考えれば

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_{2^m} & O_{2^m} \\ O_{2^m} & \mathcal{F}_{2^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{2^m}(f_e) \\ \sigma_{2^m}(f_o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{2^m}\sigma_{2^m}(f_e) \\ \mathcal{F}_{2^m}\sigma_{2^m}(f_o) \end{pmatrix}$$

となり，帰納法の仮定より $\mathcal{F}_{2^m}\sigma_{2^m}(f_e)$ と $\mathcal{F}_{2^m}\sigma_{2^m}(f_o)$ はそれぞれ f_e と f_o に対する離散フーリエ変換である．また，$-Z_{2^m,\pi}$ は

$$-Z_{2^m,\pi} = \begin{pmatrix} \zeta_{2^m}^{2^{m-1}} & & & 0 \\ & \zeta_{2^m}^{2^{m-1}+1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \zeta_{2^m}^{2^m-1} \end{pmatrix}$$

とあらわされることから，$\mathcal{F}_{2^{m+1}}\sigma_{2^{m+1}}(f)$ の第 k 成分は

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{2^{m+1}}\sigma_{2^{m+1}}(f))[k] =& (\mathcal{F}_{2^m}\sigma_{2^m}(f_e))[k] + (\mathcal{F}_{2^m}\sigma_{2^m}(f_o))[k]\zeta_{2^{m+1}}^k \\ =& \sum_{n=0}^{2^m-1} f[2n]\zeta_{2^m}^{kn} + \sum_{n=0}^{2^m-1} f[2n+1]\zeta_{2^m}^{kn}\zeta_{2^{m+1}}^k \\ =& \sum_{n=0}^{2^m-1} f[2n]\zeta_{2^{m+1}}^{2kn} + \sum_{n=0}^{2^m-1} f[2n+1]\zeta_{2^{m+1}}^{2kn+k} \\ =& \sum_{n=0}^{2^m-1} \left(f[2n]\zeta_{2^{m+1}}^{k(2n)} + f[2n+1]\zeta_{2^{m+1}}^{k(2n+1)} \right) \\ =& \sum_{n=0}^{2^{m+1}-1} f[n]\zeta_{2^{m+1}}^{kn} \end{aligned}$$

となり，数学的帰納法により $m+1$ における離散フーリエ変換が得られる．

よって，命題は証明された．

□

高速フーリエ変換による計算量について考える．これは高速フーリエ変換の表現行列をそのまま計算量に置き換えると

$$\begin{cases} T(1) = O(1) \\ T(N) = O(N) + 2T\left(\dfrac{N}{2}\right) \end{cases}$$

となるため，これを $N = 2^n$ とおいて解くと

$$\begin{aligned} T(2^n) =& O(2^n) + 2(O(2^{n-1}) + 2TO(2^{n-2})) \\ =& O(2^n) + 2(O(2^{n-1}) + 2O(2^{n-2}) + 2(O(2^{n-3}) + \cdots + O(1)))) \\ =& O(2^n n) \\ =& O(N \log N) \end{aligned}$$

となり，高速フーリエ変換の計算量は $O(N \log N)$ となる．

次に，高速フーリエ変換の証明中で用いた置換 σ_{2^n} について考える．まず，f を順序を保ったまま偶数項 f_e と奇数項 f_o に分割したとき，

$$\sigma_{2^n}(f) = \{\sigma_{2^{n-1}}(f_e), \sigma_{2^{n-1}}(f_o)\}$$

となり，さらに f_e を順序を保ったまま偶数項 f_{ee} と奇数項 f_{oe} に分割し，同様に f_o も偶数項 f_{eo} と奇数項 f_{oo} に分割すれば

$$\sigma_{2^n}(f) = \{\sigma_{2^{n-2}}(f_{ee}), \sigma_{2^{n-2}}(f_{oe}), \sigma_{2^{n-2}}(f_{eo}), \sigma_{2^{n-2}}(f_{oo})\}$$

と表現することができる．これを最後まで繰り返すことにより，$\sigma_{2^n}(f)$ は f に対して n 個の e もしくは o の添え字を付けた列として表現をすることができる．例えば $n = 4$ の場合であれば

$$\begin{aligned} \sigma_{2^4}(f) =& \{f_{eeee}, f_{oeee}, f_{eoee}, f_{ooee}, f_{eooe}, f_{oooe} \\ & f_{eeeo}, f_{oeeo}, f_{eoeo}, f_{ooeo}, f_{eooo}, f_{oooo}\} \end{aligned}$$

のようになる．これより，e を 0，o を 1 として考えることで，このような偶数項と奇数項の再帰的分割は，f の添え字に対して，それを 2 進数で表現したときの各桁が 0 であるか 1 であるかによりされることがわかる．実際に $n = 4$ の場合であれば以下のように表現しなおすことができる．

$$\begin{aligned} \sigma_{2^4}(f) =& \{f_{0000}, f_{1000}, f_{0100}, f_{1100}, f_{0110}, f_{1110} \\ & f_{0001}, f_{1001}, f_{0101}, f_{1101}, f_{0111}, f_{1111}\} \end{aligned}$$

ここで，この添え字の各桁の順序を反転すると，ちょうど添え字が整列されていることがわかる．

$$0000 < 0001 < 0010 < 0011 < \cdots < 1100 < 1101 < 1110 < 1111$$

そこで，これに関する定理を与える．

定理 2

整列された添字集合 $I_{2^n} = \{0, 1, \cdots, 2^n - 1\}$ の順序を入れ替える置換 σ_{2^n} を，I の順序を保ったまま偶数項 $I_{2^n e}$ と奇数項 $I_{2^n o}$ に分割した集合を用いて

$$\begin{cases} \sigma_1(\{a\}) = \{a\} \\ \sigma_{2^n}(I_{2^n}) = \{\sigma_{2^{n-1}}(I_{2^n e}), \sigma_{2^{n-1}}(I_{2^n o})\} \end{cases}$$

のように定義したとする．ただし，2 重の集合の括弧は無視して

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}\} = \{a, b, c, d\}$$

のように扱うものとする．このとき，$\sigma_{2^n}(I_{2^n})$ は I_{2^n} のそれぞれの元を n 桁の 2 進数で表現して，桁の順序を逆にしたものに等しい．このことから，$\sigma_{2^n}(I_{2^n})$ をビット反転順列 **(bit-reversal permutation)** という．

Proof.

n に関する数学的帰納法により示す．$n=0$ では σ_1 の定義明らかであるため，n で成り立つこと仮定して $n+1$ で成り立つことを示す．$\sigma_{2^{n+1}}(I_{2^{n+1}})$ により

$$\sigma_{2^{n+1}}(I_{2^{n+1}}) = \{\sigma_{2^n}(I_{2^{n+1}e}), \sigma_{2^n}(I_{2^{n+1}o})\}$$

となることを考えたとき，$I_{2^{n+1}e}$ のそれぞれの元は偶数であるため，$\sigma_{2^n}(I_{2^{n+1}e})$ は $\sigma_{2^n}(I_{2^n})$ のそれぞれの元を n 桁の 2 進数として左から 0 の桁を加えたものに等しい．同様にして，$I_{2^{n+1}o}$ のそれぞれの元は奇数であるため，$\sigma_{2^n}(I_{2^{n+1}o})$ は $\sigma_{2^n}(I_{2^n})$ のそれぞれの元を 2 進数として左から 1 の桁を加えたものに等しい．

また，$I_{2^{n+1}}$ を

$$I'_{2^{n+1}} = \{0, 1, \cdots, 2^n - 1\}, \quad I''_{2^{n+1}} = \{2^n, 2^n + 1, \cdots, 2^{n+1} - 1\}$$

となるように二分したとき，それぞれ集合のそれぞれの元を $n+1$ 桁の 2 進数として最上位の桁を除去したものは I_{2^n} に等しいため，$\sigma_{2^n}(I'_{2^{n+1}})$ および $\sigma_{2^n}(I''_{2^{n+1}})$ のそれぞれの集合のそれぞれの元を $n+1$ 桁の 2 進数としてみたとき，最上位の桁は不変である．つまり，最上位の桁を無視すれば $\sigma_{2^n}(I_{2^n})$ と $\sigma_{2^n}(I'_{2^{n+1}})$ と $\sigma_{2^n}(I''_{2^{n+1}})$ は等しい．

このことと帰納法の仮定より，$\sigma_{2^n}(I'_{2^{n+1}})$ および $\sigma_{2^n}(I''_{2^{n+1}})$ のそれぞれの集合のそれぞれの元の 1 から n 桁目までは桁の順序が逆になっており，$\sigma_{2^n}(I'_{2^{n+1}})$ のそれぞれの元の最上位の桁は 0，$\sigma_{2^n}(I''_{2^{n+1}})$ のそれぞれの元の最上位の桁は 1 である．つまり，$\sigma_{2^n}(I'_{2^{n+1}})$ および $\sigma_{2^n}(I''_{2^{n+1}})$ のそれぞれの集合のそれぞれの元の最上位の桁を 1 桁目にもってくることで

ex). abcdef $\Rightarrow$ bcdefa

$I'_{2^{n+1}}$ および $I''_{2^{n+1}}$ のそれぞれの集合のそれぞれの元の桁の順序は逆になり，これらを連結したものは $\sigma_{2^{n+1}}(I_{2^{n+1}})$ に等しくなる．これは数学的帰納法により $n+1$ における $\sigma_{2^{n+1}}(I_{2^{n+1}})$ が得られたこととなる．

よって，命題は証明された．

□