-双曲線関数-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2019 年 5 月 3 日
最終更新 2019 年 5 月 3 日

1 双曲線関数

変数 $x, y \in \mathbb{R}$ による単位円

$$x^2 + y^2 = 1$$

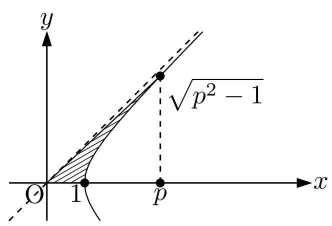
について，パラメータ $t \in \mathbb{R}$ を用いて $x = \cos t, y = \sin t$ と変数変換しても，この関係式は成り立つ．これが三角関数が**円関数 (circular function)** と呼ばれる著しい特徴の 1 つである．同様にして双曲線

$$x^2 - y^2 = 1$$

を与えたとき，三角関数と同様の変数変換について考える．三角関数において，t は始線からの角度となり，$0 \leq t < 2\pi$ による始線からの扇形の面積 S は

$$S = \frac{t}{2}.$$

双曲線のときも同様にして考えると，$0 \leq t < \frac{\pi}{4}$ で始線から $y = t$ の直線と双曲線の面積が S になるようにすればいい．このとき，面積は



より，

$$\frac{p\sqrt{p^2-1}}{2} - \int_1^p y\mathrm{d}x = S$$

を満たす t について示した p が x のパラメータ表示となる．これを計算すると，

$$\begin{aligned}
\frac{p\sqrt{p^2-1}}{2} - \int_1^p \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x =& \frac{t}{2} \\
p\sqrt{p^2-1} - \left[x\sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1})\right]_1^p =& t \\
\ln(p + \sqrt{p^2-1}) =& t
\end{aligned}$$

となるが，

$$\frac{1}{p+\sqrt{p^2-1}} = \frac{p-\sqrt{p^2-1}}{p^2-(p^2-1)} = p - \sqrt{p^2-1} \ \Rightarrow \ \ln(p+\sqrt{p^2-1}) = -\ln(p-\sqrt{p^2-1})$$

となることから

$$\begin{cases} \ln\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)=t \\ \ln\left(p-\sqrt{p^2-1}\right)=-t \end{cases}$$

が得られる．これらの両辺で指数関数をとり，連立することで

$$\begin{cases} p+\sqrt{p^2-1}=e^t \\ p-\sqrt{p^2-1}=e^{-t} \end{cases} \Rightarrow\ 2p=e^t+e^{-t}\ \Rightarrow\ x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

といったパラメータ表示が得られる．y については双曲線の定義式を満たすようにすることで，S の関係式が第 1 象限で与えられることに留意すれば

$$\begin{aligned} y=&\sqrt{x^2-1} \\ =&\frac{\sqrt{(e^t+e^{-t})^2-4}}{2} \\ =&\frac{e^t-e^{-t}}{2}. \end{aligned}$$

以上より，以下の定義が与えられる．

定義 1

変数 $x\in\mathbb{R}$ において，

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

と与えられる関数をそれぞれ**双曲線正弦 (hyperbolic sine)** および**双曲線余弦 (hyperbolic cosine)** という．三角関数の類似として

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

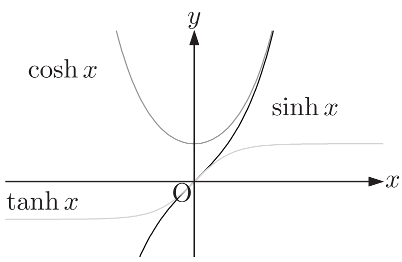
を**双曲線正接 (hyperbolic tangent)** という．これらをまとめて**双曲線関数 (hyperbolic function)** といい，複素数の場合でも同様の定義が与えられる．複素数に拡張することで，双曲線関数は虚軸方向で 2π の周期をもつ．

また，最も基本的な性質として

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

が成り立つ．

また，双曲線関数をグラフ表示すると以下のようになる．



実際，定義式から

$$\sinh(-x)=-\sinh x,\quad \cosh(-x)=\cosh x,\quad \tanh(-x)=-\tanh x$$

といった対称性はただちにわかる．

ここで，双曲線関数の性質を与える．

定理 1

$x,y\in\mathbb{R}$ について，以下の式が成り立つ．

1). 双曲線正弦の加法定理

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

2). 双曲線余弦の加法定理

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

3). 双曲線正弦の導関数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \cosh x$$

4). 双曲線余弦の導関数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cosh x = \sinh x$$

Proof.

3) について，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sinh x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

となるため成り立ち，4) も同様に示される．

1) について，右辺を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} \pm \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} =& \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\ & \pm \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\ =& \frac{e^{x \pm y} - e^{-(x + \pm y)}}{2}\end{aligned}$$

となり，左辺に一致する．2) は 1) と 3) と 4) を用いることで

$$\begin{aligned}\cosh(x \pm y) =& \frac{\partial}{\partial x}(\sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y) \\ =& \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.\end{aligned}$$

よって，命題は証明された．

□

2 逆双曲線関数

双曲線関数も三角関数と同様にして逆関数を考えることができる．まず，$x \in \mathbb{R}$ で $y = \sinh x$ の逆関数について考えると，

$$\begin{aligned}2y =& e^x - e^{-x} \\ e^{2x} - 2ye^x - 1 =& 0 \\ e^x =& y \pm \sqrt{y^2 + 1}\end{aligned}$$

となるが，$e^x \geq 0$ となるため符号は $+$ となり，

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

$y = \cosh x$ の逆関数も同様にして

$$\begin{aligned}2y =& e^x + e^{-x} \\ e^{2x} - 2ye^x + 1 =& 0 \\ e^x =& y \pm \sqrt{y^2 - 1} \\ x =& \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1}) = \pm \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})\end{aligned}$$

となり，$\cosh x$ は偶関数であるためどちらも解となる．

$y = \tanh x$ の逆関数も同様にして

$$
\begin{aligned}
y(e^x + e^{-x}) =& e^x - e^{-x} \\
(y-1)e^{2x} =& -y - 1 \\
e^{2x} =& \frac{1+y}{1-y} \\
x =& \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.
\end{aligned}
$$

これより，以下の定義を与えることができる．

定義 2

変数 $x \in \mathbb{R}$ において，

$$
\begin{cases}
\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) & (-\infty < x < \infty) \\
\operatorname{arcosh} x = \pm\ln(x + \sqrt{x^2-1}) & (1 < x) \\
\operatorname{artanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & (-1 < x < 1)
\end{cases}
$$

はそれぞれ $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ の逆関数であり，これらをまとめて**逆双曲線関数 (inverse hyperbolic function)** という．また，これらは三角関数に倣って $\sinh^{-1} x, \cosh^{-1} x, \tanh^{-1} x$ とあらわすこともある．

複素数における逆双曲線関数は実数の場合のように定義域を制限することはしないことから，複素平面全域での振る舞い考える必要がある．対数は無限多価関数であるため，逆双曲線関数は無限多価関数であり，その分岐点と截線について考える必要がある．

まず，$z \in \mathbb{C}$ による対数 $\ln z$ は 0 と無限遠点を分岐点にもち，その 2 点により複素平面は截断される．このとき，$\ln z$ の分岐点は真数 z に依存し，例えば $\ln(z-1)$ であれば分岐点は 1 と無限遠点となる．また，$z-1$ の偏角を $(-\pi, \pi]$ といった主値の範囲で 1 つの複素平面を扱うとすれば，1 と負の実軸方向の無限遠点で截線をもつリーマン面であり，対数における截線は一般に真数の偏角が $\pm\pi$ となる軌跡であることがわかる．

$w = \operatorname{arsinh} z$ について，まず $\sqrt{z^2+1}$ について考えると，

$$
\sqrt{z^2+1} = \sqrt{(z+i)(z-i)}
$$

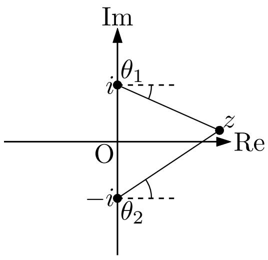
となるため，$r_1, r_2, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ を用いて $z + i = r_1 e^{i\theta_1}, z - i = r_2 e^{i\theta_2}$ とあらわせば

$$
(z+i)(z-i) = r_1 r2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}
$$

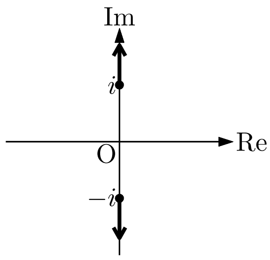
となるが，偏角の区間は $(-\pi, \pi]$ であるため，$\theta_1 + \theta_2$ の値により $(z+i)(z-i)$ の偏角を 2π だけ修正する必要があり，$\sqrt{z^2+1}$ は変化する．よって，

$$
\sqrt{z^2+1} = \begin{cases}
\sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \pi\right)} & (\theta_1 + \theta_2 > \pi) \\
\sqrt{r_1 r_2} e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \pi\right)} & (\theta_1 + \theta_2 \le -\pi) \\
\sqrt{r_1 r_2} e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} & (other).
\end{cases}
$$

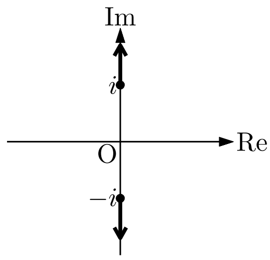
これより，$\theta_1 + \theta_2 = \pm\pi$ が截線となり，$\sqrt{z^2+1}$ の分岐截断は以下のようになる．



z 平面



z 平面



w 平面

このとき，左から順に θ_1, θ_2 の角度の対応，分岐裁断の対象となる z 平面の領域，分岐裁断といった対応となっている．$z+\sqrt{z^2+1}$ について考えると，$\sqrt{z^2+1}$ の分岐截断の結果には影響を与えないことがわかる．また，$\operatorname{arsinh} z$ について，$z+\sqrt{z^2+1}$ の分岐截断に加え，$z+\sqrt{z^2+1}$ の偏角が $\pm\pi$ となる軌跡が $\operatorname{arsinh} z$ の分岐截断となる．$\operatorname{Re} z > 0$ かつ $\operatorname{Im} z > 0$ で

$$0 < \arg\sqrt{z^2+1} \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$$

であり，$\operatorname{Im} z < 0$ としたときも

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\sqrt{z^2+1} < 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg z < 0$$

となるため，$\operatorname{Re} z > 0$ で

$$|\arg(z+\sqrt{z^2+1})| \leq \frac{\pi}{2}$$

である．$\operatorname{Re} z < 0$ のときも同様にして，$\operatorname{Im} z > 0$ で

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\sqrt{z^2+1} < 0, \quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$$

であり，$\operatorname{Re} z^2 > 0$ より $|z| < |\sqrt{z^2+1}|$ かつ $|\arg z - \frac{\pi}{2}| < |\arg\sqrt{z^2+1}|$ となるため

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\sqrt{z^2+1} < \frac{\pi}{2}$$

となり，$\operatorname{Im} z < 0$ で

$$0 < \arg\sqrt{z^2+1} \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}$$

であり，$\operatorname{Re} z^2 > 0$ より $|z| < |\sqrt{z^2+1}|$ かつ $|\arg\sqrt{z^2+1}| < |\arg z + \frac{\pi}{2}|$ となるため，

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\sqrt{z^2+1} \leq \frac{\pi}{2}$$

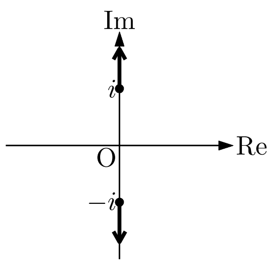
であり，$\operatorname{Re} z < 0$ で

$$|\arg(z+\sqrt{z^2+1})| \leq \frac{\pi}{2}.$$

$\operatorname{Im} z = 0$ のとき，すなわち $z \in \mathbb{R}$ のときは $|z| < |\sqrt{z^2+1}|$ であるため $\arg(z+\sqrt{z^2+1}) = 0$ となり，$\operatorname{Re} z = 0$ かつ $-i < \operatorname{Im} z < i$ のときは $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $\arg\sqrt{z^2+1} = 0$ であるため $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$ となる．以上より，複素平面全体で

$$|\arg(z+\sqrt{z^2+1})| \leq \frac{\pi}{2}$$

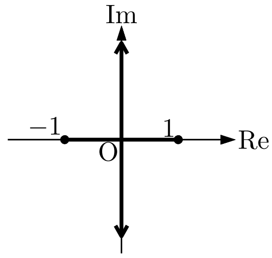
となり，$\operatorname{arsinh} z$ の分岐截断は



$\operatorname{arsinh} z$

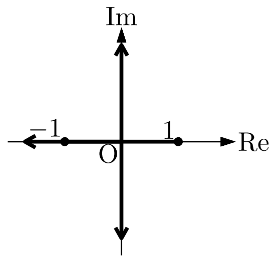
となる．

次に，$\operatorname{arcosh} z$ について，$\operatorname{arsinh} z$ と同様に考えることで $\sqrt{z^2-1}$ の分岐截断は



w 平面

となり，$z+\sqrt{z^2-1}$ は -1 から負の実軸方向に偏角が π となる点が連続に分布するため $\operatorname{arcosh} z$ の分岐截断は

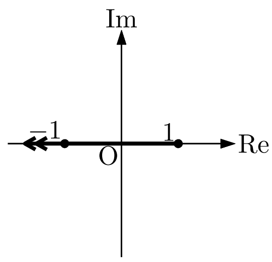


$\operatorname{arcosh} z$

となる．しかし，虚軸の分岐截断は冗長すぎるため

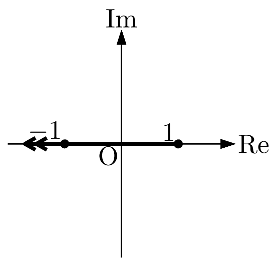
$$\operatorname{arcosh} z = \ln\left(z+\sqrt{z+1}\sqrt{z-1}\right)$$

とする場合が多い．このとき，$\sqrt{z+1}\sqrt{z-1}$ の分岐截断は $\sqrt{z+1}$ と $\sqrt{z-1}$ の重ね合わせとなるため



w 平面

となり，$\operatorname{arcosh} z$ の分岐截断は符号の正負に関係なく以下のようになる．

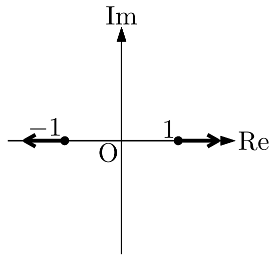


$\operatorname{arcosh} z$

$\operatorname{artanh} z$ は $\frac{1+z}{1-z}$ の偏角が $\pm\pi$ となる分布のみを与えればいいため，

$$|\arg(1+z)-\arg(1-z)| = \pi$$

となる点の分布は



z 平面

となり，これがそのまま w 平面における $\operatorname{artanh} z$ の分岐截断となる．

3　三角関数との関係

三角関数の複素関数表示により，$z \in \mathbb{C}$ で

$$\begin{cases} \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i \sinh iz \\ \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cosh iz \\ \tan z = -i \tanh iz \end{cases}$$

という関係式が得られる．逆に，これを双曲線関数について解けば

$$\begin{cases} \sinh z = -i \sin iz \\ \cosh z = \cos iz \\ \tanh z = -i \tan iz \end{cases}$$

となり，対称的な関係となる．これにより三角関数と双曲線関数の周期がそれぞれ実軸上および虚軸上で存在する対応関係がわかる．

逆三角関数の近似値を求める際，一般にテイラー展開を用いるが，それぞれの収束半径は 1 であるため，主値の範囲，例えば $2i$ の点では発散するため計算することができない．そこで，三角関数について解いた式から，例えば $\arcsin z$ については $w = \sin z$ とおくことで

$$\begin{aligned} w &= \sin z = -i \sinh iz \\ \sinh iz &= iw \\ z &= -i \ln (iw + \sqrt{1 - w^2}) \end{aligned}$$

のように逆三角関数を与えることができるため，逆三角関数について以下のようにまとめられる．

$$\begin{cases} \arcsin z = -i \operatorname{arsinh} iz = -i \ln (iz + \sqrt{1 - z^2}) \\ \arccos z = -i \operatorname{arcosh} z = -i \ln (z + \sqrt{z+1}\sqrt{z-1}) \\ \arctan z = -i \operatorname{artanh} iz = -\dfrac{i}{2} \ln \dfrac{1+iz}{1-iz} = \dfrac{i}{2} \ln \dfrac{1-iz}{1+iz} \end{cases}$$

しかし，$\arccos z$ については，この定義式では実軸上の定義域で含むべきである $(-1, 1)$ で定義されず，逆双曲線関数と同様にして

$$\arccos z = -i \ln (z + \sqrt{z^2 - 1})$$

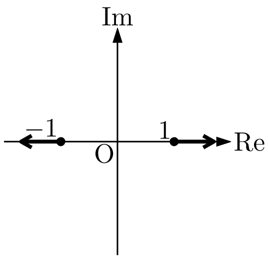
としても定義されない．このとき，1 つの解決策として

$$\arccos z = -i \ln (z + i\sqrt{1 - z^2})$$

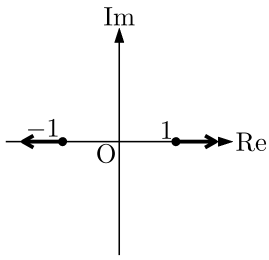
が挙げられるが，$\arcsin z + \arccos z = \frac{\pi}{2}$ という関係式から

$$\arccos z = \frac{\pi}{2} - \arcsin z = \frac{\pi}{2} + i \ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

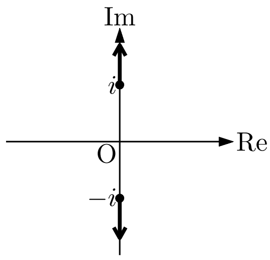
とするのが一般的である．また，この定義による逆三角関数の分岐截断について，例えば $\arcsin z$ は $\operatorname{arsinh} z$ との関係式より $\operatorname{arsinh} z$ の分岐切断を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものとなる．そのため，それぞれの分岐截断は以下のようになる．



$\arcsin z$



$\arccos z$



$\arctan z$