-法線行列-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2019 年 7 月 30 日
最終更新 2019 年 7 月 30 日

1　法線行列

一般の基底変換を考える場合，ビュー行列により位置ベクトルは基底変換されるが，法線ベクトルでは勝手が変わってくる．まず，法線ベクトルは位置に対して不変であるため，ビュー行列における平行移動成分は除去される．また，ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ とそれに直交するベクトル $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^n$ は直交行列によるベクトルの変換に対して，直交行列の定義から直交性を保存する．$\boldsymbol{x}$ に対して n 次のスケール変換行列，すなわち対角行列 A を作用させるとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{n}$ の直交性を保存するには

$$(A\boldsymbol{x})^T(A^{-1}\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{x}^T A^T A^{-1}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}^T A A^{-1}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{n} = 0$$

となることから，$\boldsymbol{n}$ には A の逆行列を作用させればいい．平行移動成分を除去したビュー行列を N として，N を基底変換行列とではなく座標変換行列として扱うとする．N は直交行列 U, V と対角行列 Σ により

$$N = U\Sigma V^T$$

と特異値分解することが可能である．N を $\boldsymbol{x}$ に対して作用させるとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{n}$ の直交性を保存するには $\boldsymbol{n}$ に対して

$$U\Sigma^{-1}V^T$$

を作用させればいいが，これを変形することにより

$$\begin{aligned}
U\Sigma^{-1}V^T =& (U^{-1})^T\Sigma^{-1}((V^T)^{-1})^T \\
=& ((V^T)^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1})^T \\
=& ((U\Sigma V^T)^{-1})^T \\
=& (N^{-1})^T \\
=& (N^T)^{-1}
\end{aligned}$$

が得られる．

これより，以下の定義が与えられる．

定義 1

ビュー行列の平行移動成分を除去した行列の転置逆行列を**法線行列 (normal matrix)** という．

法線行列は平行移動成分をもたないため，一般には同次変換のために拡張した次元は除去される．