物理数学 -球面調和関数-

いろはの学習備忘録
https://168iroha.net

初回更新 2021 年 3 月 17 日
最終更新 2021 年 3 月 17 日

目次

第 1 章

球面調和関数

1.1　三次元ラプラス方程式

天下り的ではあるが，三次元ラプラス方程式の球面上での振る舞いを考える．ラプラス方程式 $\nabla^2\psi = 0$ を与え，ψ を三次元極座標系

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

として

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

と変数分離をして考える．まず，極座標変換を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)\Theta\Phi + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)R\Phi + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}R\Theta =& 0 \\ \sin^2\theta\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} + \sin\theta\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)}{\Theta} =& -\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}}{\Phi} \end{aligned}$$

となり，左辺は ϕ に依存しないため

$$\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}}{\Phi} = -\mu^2 = constant$$

とおくことができる．これより，

$$\begin{aligned} \sin^2\theta\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} + \sin\theta\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)}{\Theta} =& \mu^2 \\ \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} =& \frac{\mu^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)}{\Theta} \end{aligned}$$

となり，r と θ の依存を分離することができ，

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} = \frac{\mu^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)}{\Theta} = \lambda = constant$$

とおくことができる．このとき，求めるべき解は $r = r_0$ と固定した $\psi(\theta,\phi) = \psi(r_0,\theta,\phi)$ であるため，R については考えなくていい．Φ の一般解は単純な二階常微分方程式であるため，任意定数 C_1, C_2 を用いて

$$\Phi(\phi) = C_1e^{i\mu\phi} + C_2e^{-i\mu\phi}$$

と与えられる．Θ については式を整理すると

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0$$

ここで，$x = \cos\theta$ と置換すると

$$\sin^2 x + x^2 = 1, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

となるため，

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)\Theta =&0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)\Theta =&0\\
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)\Theta =&0
\end{aligned}
$$

のように変形される．しかし，この微分方程式は導関数の係数に複数の次数の x を係数としてもつため，解析は困難である．そこで，適当な定数 ρ を用いて $\Theta(x)=(1-x^2)^\rho\Theta_2(x)$ とおくことこれを解消する．

$$
\begin{aligned}
\Theta(x) =&(1-x^2)^\rho\Theta_2(x)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x) =&-2\rho x(1-x^2)^{\rho-1}\Theta_2(x)+(1-x^2)^\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_2(x)\\
=&(1-x^2)^\rho\left(-\frac{2\rho x}{1-x^2}\Theta_2(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_2(x)\right)\\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta(x) =&-2\rho x(1-x^2)^{\rho-1}\left(-\frac{2\rho x}{1-x^2}\Theta_2(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_2(x)\right)+(1-x^2)^\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{2\rho x}{1-x^2}\Theta_2(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_2(x)\right)\\
=&(1-x^2)^\rho\left(\left(\frac{4\rho^2x^2}{(1-x^2)^2}\Theta_2(x)-\frac{2\rho x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_2(x)\right)+\left(-\frac{2\rho(1+x^2)}{(1-x^2)^2}\Theta_2(x)-\frac{2\rho x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_2(x)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta_2(x)\right)\right)\\
=&(1-x^2)^\rho\left(\frac{4\rho^2x^2-2\rho-2\rho x^2}{(1-x^2)^2}\Theta_2(x)-\frac{4\rho x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_2(x)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta_2(x)\right)\\
=&(1-x^2)^\rho\left(\frac{4\rho^2x^2-2\rho+2\rho x^2-4\rho x^2}{(1-x^2)^2}\Theta_2(x)-\frac{4\rho x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_2(x)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta_2(x)\right)\\
=&(1-x^2)^\rho\left(\frac{4\rho x^2(\rho-1)-2\rho(1-x^2)}{(1-x^2)^2}\Theta_2(x)-\frac{4\rho x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_2(x)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta_2(x)\right)\\
=&(1-x^2)^\rho\left(\frac{4\rho x^2(\rho-1)}{(1-x^2)^2}\Theta_2(x)-\frac{2\rho}{1-x^2}\Theta_2(x)-\frac{4\rho x}{1-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_2(x)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Theta_2(x)\right)
\end{aligned}
$$

となるため，これを代入する．

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta_2}{\mathrm{d}x^2}+(-4\rho x-2x)\frac{\mathrm{d}\Theta_2}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{4\rho x^2(\rho-1)}{1-x^2}-2\rho+\frac{4\rho x^2}{1-x^2}+\lambda-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)\Theta_2 =&0\\
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta_2}{\mathrm{d}x^2}-2x(2\rho+1)\frac{\mathrm{d}\Theta_2}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{4\rho^2x^2-\mu^2}{1-x^2}-2\rho+\lambda\right)\Theta_2 =&0
\end{aligned}
$$

この式を簡約化するには $\rho=\frac{\mu}{2}$ とすればいい．このとき，

$$
\begin{aligned}
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta_2}{\mathrm{d}x^2}-2x(\mu+1)\frac{\mathrm{d}\Theta_2}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\mu^2x^2-\mu^2}{1-x^2}-\mu+\lambda\right)\Theta_2 =&0\\
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta_2}{\mathrm{d}x^2}-2x(\mu+1)\frac{\mathrm{d}\Theta_2}{\mathrm{d}x}+(\lambda-\mu^2-\mu)\Theta_2 =&0
\end{aligned}
$$

のようになり，簡約化される．これより，この微分方程式の級数解を求める．まず，係数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ および最低次数 r を用いて

$$
\Theta_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{r+k}
$$

という形式となることを仮定する．$k<0$ で $c_k=0$ とすれば，

$$\begin{aligned}
(\lambda-\mu^2-\mu)\Theta_2 =&(\lambda-\mu^2-\mu)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{r+k}\\
-2x(\mu+1)\frac{\mathrm{d}\Theta_2}{\mathrm{d}x} =&-2(\mu+1)\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)c_kx^{r+k}\\
(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta_2}{\mathrm{d}x^2} =&(1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)c_kx^{r+k-2}\\
=&\sum_{k=-2}^{\infty}(r+k+2)(r+k+1)c_{k+2}x^{r+k}-\sum_{k=0}^{\infty}(r+k)(r+k-1)c_kx^{r+k}
\end{aligned}$$

となるため，x^{r+k} の係数比較を行うと

$$((\lambda-\mu^2-\mu)-2(\mu+1)(r+k)-(r+k)(r+k-1))c_k+(r+k+2)(r+k+1)c_{k+2}=0$$

ここで，c_k の係数について考えると，

$$\begin{aligned}
&(\lambda-\mu^2-\mu)-2(\mu+1)(r+k)-(r+k)(r+k-1)\\
=&\lambda-\mu^2-\mu-2(\mu r+\mu k+r+k)-(r+k)^2+(r+k)\\
=&\lambda-(\mu^2+\mu+2\mu r+2\mu k+r+k+r^2+2rk+k^2)\\
=&\lambda-(\mu^2+r^2+k^2+2\mu r+2rk+2\mu k+\mu+r+k)\\
=&\lambda-((\mu+r+k)^2+(k+\mu+r+k))\\
=&\lambda-(\mu+r+k)(\mu+r+k+1)
\end{aligned}$$

と因数分解をすることができる．また，λ について

$$a(a+1)-b(b+1)=(a-b)(a+b+1)$$

を適用するために適当な n で $\lambda=n(n+1)$ とあらわすとすれば，

$$\lambda-(\mu+r+k)(\mu+r+k+1)=(n-\mu-r-k)(n+\mu+r+k+1).$$

以上により，c_k に関する関係式は以下のようにまとめられる．

$$\begin{cases}
c_k=0 & (0<k)\\
(r+k+2)(r+k+1)c_{k+2}+(n-\mu-r-k)(n+\mu+r+k+1)c_k=0 & (other)
\end{cases}$$

$c_0\neq 0$ の場合を考えると，$k=-2$ のとき

$$r(r-1)c_0=0\ \Rightarrow\ r=0,1$$

となるため，それぞれの r の場合で考える．まずは r の具体値は無視し，c_k の解を偶数項と奇数項と分けて与える．まず，偶数項 c_{2k} については

$$\begin{aligned}
c_{2k}=&-\frac{(n-\mu-r-2k+2)(n+\mu+r+2k-1)}{(r+2k)(r+2k-1)}c_{2(k-1)}\\
=&\frac{(-1)^k}{(r+2k)(r+2k-1)\cdots(r+1)}(n-\mu-r)(n-\mu-r-2)\cdots(n-\mu-r-2k+2)\\
&(n+\mu+r+2k-1)(n+\mu+r+2k-3)\cdots(n+\mu+r+1)c_0\\
=&\frac{(-1)^k}{\prod_{i=1}^{2k}(r+i)}\prod_{i=0}^{k-1}(n-\mu-r-2i)\prod_{j=0}^{k-1}(n+\mu+r+1+2j)c_0
\end{aligned}$$

となり，同様にして奇数項 c_{2k+1} については

$$c_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{\prod_{i=1}^{2k}(r+i+1)}\prod_{i=0}^{k-1}(n-\mu-r-2i-1)\prod_{j=0}^{k-1}(n+\mu+r+2+2j)c_1.$$

次に，$r=1$ の場合を考える．$k=-1$ のときを考えることで

$$
\begin{aligned}
(r+1)rc_1+(n-\mu-r+1)(n+\mu+r)c_{-1} =&0\\
c_1 =&0
\end{aligned}
$$

となるため，奇数項について $c_{2k+1}=0$ となる．つまり，Θ_2 の解の 1 つは

$$
\Theta_{2,r=1}(x)=c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\prod_{i=1}^{2k}(1+i)}\prod_{i=0}^{k-1}(n-\mu-1-2i)\prod_{j=0}^{k-1}(n+\mu+2+2j)x^{1+2k}
$$

と与えられ，c_0 は 0 ではない任意定数に相当する．$r=0$ のときも $k=-1$ の場合を考えたいところではあるが，$r=1$ の場合の $c_1=0$ となることの導出より，$r=0$ の場合は $c_1=0$ となることは示すことができないことがわかる．そのため，

$$
\begin{aligned}
\Theta_{2,r=0}(x)=&\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+1}x^{2k+1}\\
=&c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\prod_{i=1}^{2k}i}\prod_{i=0}^{k-1}(n-\mu-2i)\prod_{j=0}^{k-1}(n+\mu+1+2j)x^{2k}\\
&+c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\prod_{i=1}^{2k}(i+1)}\prod_{i=0}^{k-1}(n-\mu-2i-1)\prod_{j=0}^{k-1}(n+\mu+2+2j)x^{2k+1}\\
=&c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\prod_{i=1}^{2k}i}\prod_{i=0}^{k-1}(n-\mu-2i)\prod_{j=0}^{k-1}(n+\mu+1+2j)x^{2k}+\frac{c_1}{c_0}\Theta_{2,r=1}(x)
\end{aligned}
$$

が得られる．これより，元の微分方程式は線型微分方程式であるため，Θ_2 基本解は

$$
\begin{aligned}
\Theta_{2,1}(x)=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\prod_{i=1}^{2k}(1+i)}\prod_{i=0}^{k-1}(n-\mu-1-2i)\prod_{j=0}^{k-1}(n+\mu+2+2j)x^{1+2k}\\
\Theta_{2,2}(x)=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\prod_{i=1}^{2k}i}\prod_{i=0}^{k-1}(n-\mu-2i)\prod_{j=0}^{k-1}(n+\mu+1+2j)x^{2k}
\end{aligned}
$$

の 2 つとなる．そして，一般解は 0 ではない任意定数 C_3,C_4 を用いて

$$
\Theta_2(x)=C_3\Theta_{2,1}(x)+C_4\Theta_{2,2}(x)
$$

とあらわされる．また，$\Theta_{2,1}(x)$ は明らかに奇関数，$\Theta_{2,2}(x)$ は偶関数である．

次に，これらの収束性を確認する．c_k について

$$
\frac{c_{k+2}}{c_k}=-\frac{(n-\mu-r-k)(n+\mu+r+k+1)}{(r+k+2)(r+k+1)}
$$

より

$$
\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+2}}{c_k}\right|=1
$$

となるため，Θ_2 の級数解の収束半径は 1 である．

以上により，解 $\psi(\theta,\phi)$ は

$$
\begin{aligned}
\psi(\theta,\phi)=&R(r_0)\Theta(\theta)\Phi(\phi)\\
=&(1-\cos^2\theta)^{\rho}\Theta_2(\cos\theta)(C_1e^{i\mu\phi}+C_2e^{-i\mu\phi})\\
=&\sin^{\mu}(\theta)(C_3\Theta_{2,1}(\cos\theta)+C_4\Theta_{2,2}(\cos\theta))(C_1e^{i\mu\phi}+C_2e^{-i\mu\phi})
\end{aligned}
$$

とあらわすことができる．なお，$R(r_0)$ については定数となるため無視をした．

この解の導出過程において，変数分離をすることで常微分方程式へと変換をしたが，これには特別な名称が与えられ

ている．それをここで定義する．

Dfn 1.1

関数 $y = f(x)$ と定数 m, n に関する常微分方程式が

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0$$

であるとき，この常微分方程式をルジャンドルの陪微分方程式 **(associated Legendre differential equation)** といい，$m = 0$ とした

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + n(n+1)y = 0$$

をルジャンドルの微分方程式 **(Legendre differential equation)** という．

1.2　ルジャンドルの多項式

まず，定数 m, n に関するルジャンドルの陪微分方程式

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0$$

を与え，$y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}z$ とおく．このとき，係数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ および最低次数 r の z に関する級数解

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{r+k}$$

を考えると，c_k について

$$\begin{cases} c_k = 0 & (0 < k) \\ (r+k+2)(r+k+1)c_{k+2} + (n-m-r-k)(n+m+r+k+1)c_k = 0 & (other) \end{cases}$$

のような関係式が与えられ，r については $r = 0, 1$ をとるのであった．また，z の基本解より $c_0 \neq 0, c_1 = 0$ の場合のみを考えればいいことがわかる．つまり，考えるのは c_{2k} についてのみである．そのため，漸化式は

$$c_{2k} = -\frac{(n-m-r-2k+2)(n+m+r+2k-1)}{(r+2k)(r+2k-1)}c_{2(k-1)}$$

である．ここで，$n-m-r-2k+2 = 0$ となる k が存在するとすれば，解は多項式となる．解が $n-m-r-2k+2 = 0, n+m+r+2k-1 > 0$ の条件下で多項式となるとき，$m, n \in \mathbb{Z}(0 \leq n, |m| \leq n)$ となる必要があることがわかる．$r = 0$ の場合は，$n - m = 2(k-1)$ であるため，$n - m$ は偶数 $2s = n - m$ となればよく，$r = 1$ の場合は $n - m = 2(k-1) + 1$ であるため，$n - m$ は奇数 $2t + 1 = n - m$ となればいい．それぞれの場合の k は $k = s + 1$ で，$k = t + 1$ で $c_{2k} = 0$ となる．また，$n - m$ が偶数であるとき $n + m$ も偶数，$n - m$ が奇数であるとき $n + m$ も奇数となるため，それぞれを $2s' = n + m, 2t' + 1 = n + m$ とおく．

m と n が $0 \leq n, |m| \leq n$ を満たす整数であることにより，

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k r!}{(r+2k)!} \cdot \frac{(n-m-r)!!}{(n-m-r-2k)!!} \cdot \frac{(n+m+r+2k-1)!!}{(n+m+r-1)!!}c_0$$

のように階乗および二重階乗を用いて表現をすることができる．$r = 0$ の場合を考えると，

$$\begin{aligned} c_{2k} =& \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{(2s)!!}{(2s-2k)!!} \cdot \frac{(2s'+2k-1)!!}{(2s'-1)!!}c_0 \\ =& \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{2^s s!}{2^{s-k}(s-k)!} \cdot \frac{(2s'+2k)!2^{s'}s'!}{2^{s'+k}(s'+k)!(2s')!}c_0 \\ =& \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{s!}{(s-k)!} \cdot \frac{(2s'+2k)!s'!}{(s'+k)!(2s')!}c_0 \end{aligned}$$

となり，二重階乗が除去される．同様にして，$r=1$ の場合を考えると

$$\begin{aligned}
c_{2k} =& \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{(2t+1-1)!!}{(2t+1-1-2k)!!}\cdot\frac{(2t'+1+1+2k-1)!!}{(2t'+1+1-1)!!}c_0\\
=& \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{2^t t!}{2^{t-k}(t-k)!}\cdot\frac{(2t'+2k+2)!2^{t'+1}(t'+1)!}{2^{t'+k+1}(t'+k+1)!(2t'+2)!}c_0\\
=& \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{t!}{(t-k)!}\cdot\frac{(2t'+2k+2)!(t'+1)!}{(t'+k+1)!(2t'+2)!}c_0.
\end{aligned}$$

このとき，それぞれの場合における解は

$$\begin{aligned}
z_1(x) =& c_{0,1}\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot\frac{s!}{(s-k)!}\cdot\frac{(2s'+2k)!s'!}{(s'+k)!(2s')!}x^{2k}\\
z_2(x) =& c_{0,2}\sum_{k=0}^{t}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot\frac{t!}{(t-k)!}\cdot\frac{(2t'+2k+2)!(t'+1)!}{(t'+k+1)!(2t'+2)!}c_0x^{1+2k}
\end{aligned}$$

とあらわされることとなる．なお，$c_{0,1}$ と $c_{0,2}$ は z_1 と z_2 のそれぞれの場合における c_0 である．このとき，それぞれは有限の多項式であるため，$k\mapsto s-k, k\mapsto t-k$ として考えることができる．これを適用することにより，

$$\begin{aligned}
z_1(x) =& c_{0,1}\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^{s-k}}{(2s-2k)!}\cdot\frac{s!}{k!}\cdot\frac{(2s'+2s-2k)!s'!}{(s'+s-k)!(2s')!}x^{2s-2k}\\
=& c_{0,1}\frac{(-1)^s s!s'!}{(2s')!}\sum_{k=0}^{s}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{(n-m-2k)!k!(n-k)!}x^{n-m-2k}\\
z_2(x) =& c_{0,2}\sum_{k=0}^{t}\frac{(-1)^{t-k}}{(2t-2k+1)!}\cdot\frac{t!}{k!}\cdot\frac{(2t'+2t-2k+2)!(t'+1)!}{(t'+t-k+1)!(2t'+2)!}x^{1+2t-2k}\\
=& c_{0,2}\frac{(-1)^t t!(t'+1)!}{(2t'+2)!}\sum_{k=0}^{t}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{(n-m-2k)!k!(n-k)!}x^{n-m-2k}
\end{aligned}$$

のようになり，$s=\lfloor\frac{n-m}{2}\rfloor, t=\lfloor\frac{n-m}{2}\rfloor$ とあらわすことができることに留意すれば，定数倍の違いを除いて $z_1(x)$ と $z_2(x)$ は一致する．$c_{0,1}$ と $c_{0,2}$ の選び方については，天下り的であるが，基本解 z_0 が

$$z_0(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-m}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{(n-m-2k)!k!(n-k)!}x^{n-m-2k}$$

となるように与える．これにより以下の定義が与えられる．

Dfn 1.2

定数 $m,n\in\mathbb{Z}(0\le n,|m|\le n)$ によるルジャンドルの陪微分方程式

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$$

の解の 1 つである

$$P_n^m(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-m}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{(n-m-2k)!k!(n-k)!}x^{n-m-2k}$$

を，ルジャンドルの陪多項式 **(associated Legendre polynomials)** といい，$m=0$，すなわちルジャンドルの微分方程式の解の 1 つである

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{(n-2k)!k!(n-k)!}x^{n-2k}$$

をルジャンドルの多項式 **(Legendre polynomials)** という．

ルジャンドルの多項式の導出過程より，直ちに以下の定理が成り立つ．

Thm 1.1

ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ とルジャンドルの陪多項式 $P_n^m(x)$ について，$P_n(x)$ は n が偶数であるとき偶関数，n が奇数であるとき奇関数であり，$P_n^m(x)$ は $n-m$ が偶数であるとき偶関数，$n-m$ が奇数であるとき奇関数である．

Proof.

ルジャンドルの多項式の導出過程より自明である．

□

ルジャンドルの多項式については微分による以下の同値な定義が与えられる．

Thm 1.2　ロドリゲスの公式

ルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ は以下の同値な定義をもつ．

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

これを**ロドリゲスの公式 (Rodrigues' formula)** という．

Proof.

$$\begin{aligned} P_n(x) =& \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{(n-2k)!k!(n-k)!}x^{n-2k} \\ =& \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{(n-2k)!k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-2k)!}{(2n-2k)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{2n-2k} \\ =& \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{2n-2k} \end{aligned}$$

となるが，ここで $k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ のとき x^{2n-2k} の n 階微分は 0 となるため

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{2n-2k}$$

とあらわすことができる．ここで，二項定理より

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2(n-k)}$$

となることから

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}$$

とすることにより，ロドリゲスの公式が得られる．

□

この同値な定義を用いることで，母関数による同値な定義が与えられる．

Thm 1.3

ルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ は以下の同値な定義をもつ．

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

なお，$|t|<1, |x|\leq 1$ である．

Proof.

ロドリゲスの公式と複素関数論におけるグルサの公式を用いることで

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

とあらわされる．積分路 C は x の周りを一周する単純閉曲線であるとする．仮定より $|t|<1, |x|\leq 1$ であるため，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^{n+1}\pi i}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\mathrm{d}z \\
=& \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t(z^2-1)}{2(z-x)}\right)^n \mathrm{d}z \\
=& \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z-x}\left(1-\frac{t(z^2-1)}{2(z-x)}\right)^{-1} \mathrm{d}z \\
=& \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z-x}\cdot\frac{2(z-x)}{2(z-x)-t(z^2-1)}\mathrm{d}z \\
=& \frac{-1}{\pi i}\oint_C \frac{1}{tz^2-2z+2x-t}\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

と変形される．ここで，被積分関数を $f(z)$ とおいたとき，$f(z)$ の極は

$$\begin{aligned}
tz^2-2z+2x-t =& 0 \\
z_1 =& \frac{1+\sqrt{1-t(2x-t)}}{t} \\
z_2 =& \frac{1-\sqrt{1-t(2x-t)}}{t}
\end{aligned}$$

と得られる．次に，これらの特異点が C 内部に存在する，すなわち無限遠点に存在しないことを検証する．それぞれの特異点について $t\to 0$ の場合は明らかに発散する．ここで，特定点の分母についての方程式を解くと，

$$\begin{aligned}
1\pm\sqrt{1-t(2x-t)} =& 0 \\
1-t(2x-t) =& 1 \\
2tx =& t^2 \\
x =& \frac{t}{2}
\end{aligned}$$

が得られるが，符号がプラスのときは $x=\frac{t}{2}$ は解とならない，すなわち z_1 の分母は常に 0 より大きいため，z_1 は $t\to 0$ で発散，すなわち無限遠点に存在する．z_2 についてはロピタルの定理を適用して $t\to 0$ の極値を求めると，

$$\lim_{t\to 0} z_2 = \lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t(2x-t)}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-(x-t)}{\sqrt{1-t(2x-t)}} = x$$

となり，z_2 は $t\to 0$ で収束する．これより，特異点が C は z_1 を含まず，z_2 のみを含むようにとればいい．実際，z_1 と z_2 が一致する場合，すなわち

$$\sqrt{1-t(2x-t)} = 0 \Rightarrow\ x = \frac{1+t^2}{2t}$$

となる場合では，$2t$ が $t=1$ の場合における $1+t^2$ の接線であるため，$|t|<1$ の仮定の下において

$$1+t^2 > |2t|.$$

つまり，$|x|>1$ であり，$|t|<1, |x|\leq 1$ の仮定の元 z_1 と z_2 が一致することはない．これより，積分路 C を適当に選択することができる．次に，z_2 における $f(z)$ の留数を計算すると

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{f(z)}{t} = \frac{1}{t(z_2-z_1)} = -\frac{1}{2\sqrt{1-t(2x-t)}}$$

となるため，留数定理より以下が得られる．

$$\frac{-1}{\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z = -2\mathrm{Res}(f, z_2) = \frac{1}{\sqrt{1-t(2x-t)}}$$

□

この定義を用いることで，以下の漸化式による定義が得られる．

Thm 1.4　ボネの漸化式

ルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ は以下の漸化式と同値な定義をもつ．

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n+1}((2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)) \end{cases}$$

これを**ボネの漸化式 (Bonnet’s recursion formula)** という．

Proof.

母関数によるルジャンドルの多項式を t で偏微分すると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} =& \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\
(1-2xt+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1} =& (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}(x)t^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)P_{n-1}(x)t^n =& x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n \\
\sum_{n=2}^{\infty}((n+1)P_{n+1}(x) - (2xn+x)P_n(x) + (n-1+1)P_{n-1}(x))t^n + P_1 =& 0
\end{aligned}$$

となるため，それぞれの $n \geq 2$ の場合での t^n の係数比較を行う．係数比較を行うと，

$$\begin{aligned}
(n+1)P_{n+1}(x) - (2xn+x)P_n(x) + (n-1+1)P_{n-1}(x) =& 0 \\
P_{n+1}(x) =& \frac{1}{n+1}((2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x))
\end{aligned}$$

となり，漸化式が得られる．

□

次に，ルジャンドルの陪多項式が，何をもってしてルジャンドルの多項式と関連 (associated) しているのかを考える．結果だけ記述すると以下の定理のような対応付けによるものである．

Thm 1.5

ルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ とルジャンドルの陪多項式 $P_n^m(x)$ は以下の関係を満たす．

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)$$

Proof.

ルジャンドルの微分方程式は

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}P_n(x) - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

と記述され，これを m 階微分すると

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\binom{m}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{2+m-k}}{\mathrm{d}x^{2+m-k}}P_n(x)-\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(2x)\frac{\mathrm{d}^{1+m-k}}{\mathrm{d}x^{1+m-k}}P_n(x)\right)+n(n+1)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{2+m}}{\mathrm{d}x^{2+m}}P_n(x)-2x(1+m)\frac{\mathrm{d}^{1+m}}{\mathrm{d}x^{1+m}}P_n(x)+\left(-2\binom{m}{2}-2m+n(n+1)\right)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)=0$$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{2+m}}{\mathrm{d}x^{2+m}}P_n(x)-2x(1+m)\frac{\mathrm{d}^{1+m}}{\mathrm{d}x^{1+m}}P_n(x)+(n(n+1)-m(m+1))\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)=0$$

となり，

$$y=(1-x)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x)$$

とすることで，y に関する微分方程式はルジャンドルの陪微分方程式に一致する．つまり，その解である y はルジャンドルの陪多項式である．

□

この定理とロドリゲスの公式を用いることで，$P_n^{-m}(x)$ における性質を与えることができる．

Thm 1.6

ルジャンドルの陪多項式 $P_n^m(x)$ について，以下の性質が成り立つ．

$$P_n^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x)$$

Proof.

$P_n^m(x)$ は Thm 1.5 とロドリゲスの公式を用いて

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^n$$

とあらわされるため，$P_n^{-m}(x)$ は

$$P_n^{-m}(x)=(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{-\frac{m}{2}}}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{-m+n}}{\mathrm{d}x^{-m+n}}(x^2-1)^n$$

となる．このとき，比例定数 C を用いて $P_n^{-m}(x)=CP_n^m(x)$ とすれば，

$$\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}(x^2-1)^n=C(1-x^2)^m\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^n$$

と記述をすることができる．まずは，左辺の (x^2-1) に関する項について計算をすると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}(x^2-1)^n=&\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}((x+1)^n(x-1)^n)\\=&\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n-m}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x+1)^n\frac{\mathrm{d}^{n-m-k}}{\mathrm{d}x^{n-m-k}}(x-1)^n\\=&\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(n-m)!}{k!(n-m-k)!}\frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}\frac{n!}{(m+k)!}(x-1)^{m+k}\\=&(n-m)!\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(n!)^2}{k!(n-m-k)!(n-k)!(m+k)!}(x+1)^{n-k}(x-1)^{m+k}\end{aligned}$$

となり，同様にして右辺の (x^2-1) に関する項を計算すると

$$\begin{aligned}(1-x^2)^m\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^n =&(1-x^2)^m\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x+1)^n\frac{\mathrm{d}^{n+m-k}}{\mathrm{d}x^{n+m-k}}(x-1)^n\\ =&(1-x^2)^m\sum_{k=m}^{n}\binom{n+m}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}\frac{n!}{(-m+k)!}(x-1)^{-m+k}\\ =&(-1)^m\sum_{k=0}^{n-m}\binom{n+m}{k+m}\frac{n!}{(n-k-m)!}(x+1)^{n+m-k-m}\frac{n!}{(-m+k+m)!}(x-1)^{k+m}\\ =&(-1)^m(n+m)!\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(n!)^2}{(k+m)!(n-k)!(n-k-m)!k!}(x+1)^{n-k}(x-1)^{k+m}\end{aligned}$$

となるため，以下が得られる．

$$(n-m)!=C(-1)^m(n+m)!\ \Rightarrow\ C=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

□

また，ルジャンドル多項式における著しい性質として，以下の直交性が成り立つ．

Lem 1.1　正則関数 $f(x)$ と多項式 $(x^2-1)^n$ の積について，

$$\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f(x)(x^2-1)^n)\right]_{-1}^{1}=0.$$

なお，$n\geq 2$ かつ $k<n$ とする．

Proof.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)(x^2-1)^n)=f'(x)(x^2-1)^n+2xnf(x)(x^2-1)^{n-1}=(x^2-1)^{n-1}(f'(x)(x^2-1)+2xnf(x))$$

となるため，この結果を $(x^2-1)^{n-1}f_1(x)$ とおき，全体で k 回繰り返すことで

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f(x)(x^2-1)^n)=(x^2-1)^{n-k}f_k(x)$$

となり，仮定より $n\geq 2$ かつ $k<n$ であるため $n-k\geq 1$ である．$f_k(x)$ は $f(x)$ の正則性より $x=\pm 1$ で有限の値をとるため，$(x^2-1)^{n-k}f_k(x)$ は $x=\pm 1$ で 0 となる．

□

Thm 1.7

ルジャンドルの多項式 $P_n(x)$ とルジャンドルの陪多項式 $P_n^m(x)$ について，以下の性質が成り立つ．

$$\begin{aligned}\langle P_p,P_q\rangle&=\int_{-1}^{1}P_p(x)P_q(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2p+1}\delta_{p,q}\\ \langle P_p^m,P_q^m\rangle&=\int_{-1}^{1}P_p^m(x)P_q^m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2p+1}\cdot\frac{(p+m)!}{(p-m)!}\delta_{p,q}\end{aligned}$$

Proof.

$\langle P_p,P_q\rangle$ に対してロドリゲスの公式を用いて部分積分を適用すると

$$\int_{-1}^{1}P_p(x)P_q(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^q q!}\left(\left[P_p(x)\frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}x^{q-1}}(x^2-1)^q\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_p(x)\frac{\mathrm{d}^{q-1}}{\mathrm{d}x^{q-1}}(x^2-1)^q\mathrm{d}x\right)$$

となるが，Lem 1.1 より [] 部は 0 となる．これと同様の操作を繰り返すことにより

$$\int_{-1}^{1} P_p(x)P_q(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^q}{2^q q!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}P_p(x)(x^2-1)^q\mathrm{d}x$$

となる．$p<q$ のときは $\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}P_p(x)=0$ となるため，$\langle P_p, P_q\rangle = 0$ であり，$p>q$ のときは $\langle P_q, P_p\rangle$ と考えればいいため，$\langle P_p, P_q\rangle = 0$ という同様の結果が得られる．$p=q$ のときはロドリゲスの公式より

$$\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}x^q}P_q(x) = \frac{(2q)!}{2^q q!}$$

と定数で与えられるため

$$\int_{-1}^{1} P_p(x)P_q(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^q(2q)!}{(2^q q!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^q\mathrm{d}x.$$

ここで，$x=\sin\theta$ と置換することでウォリス積分が適用することができ，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_p(x)P_q(x)\mathrm{d}x =&\frac{(2q)!}{(2^q q!)^2}2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta^{2q+1}\mathrm{d}\theta\\ =&\frac{(2q)!}{(2^q q!)^2}\cdot\frac{2(2q)!!}{(2q+1)!!}\\ =&\frac{(2q)!}{(2^q q!)^2}\cdot\frac{2\cdot 2^q q! 2^{q+1}(q+1)!}{(2q+2)!}\\ =&\frac{4(q+1)}{(2q+2)(2q+1)}\\ =&\frac{2}{2q+1}.\end{aligned}$$

$\left\langle P_p^m, P_q^m\right\rangle$ については，Thm 1.5 とロドリゲスの公式を用いて

$$P_n^m(x) = (x^2-1)^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}(x^2-1)^n$$

とあらわすことで $\langle P_p, P_q\rangle$ と同様にして証明を与えることができる．まず，$\left\langle P_p^m, P_q^m\right\rangle$ を積分表示すると

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x)P_q^m(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^m}{2^{p+q}p!q!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^{m+p}}{\mathrm{d}x^{m+p}}(x^2-1)^p\frac{\mathrm{d}^{m+q}}{\mathrm{d}x^{m+q}}(x^2-1)^q\mathrm{d}x$$

となるため，$\langle P_p, P_q\rangle$ と同様にして部分積分を考える．そこで，部分積分を k 回繰り返すことによりあらわれる項

$$\left[\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\left((x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^{m+p}}{\mathrm{d}x^{m+p}}(x^2-1)^p\right)\frac{\mathrm{d}^{m+q-k}}{\mathrm{d}x^{m+q-k}}(x^2-1)^q\right]_{-1}^{1}$$

について考えると，Lem 1.1 より $k\leq m$ で

$$\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\left((x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^{m+p}}{\mathrm{d}x^{m+p}}(x^2-1)^p\right)(\pm1)=0$$

となり，$k>m$ で $m\leq q$ かつ $(x^2-1)^q$ より $m+q-k<q$ となるあることに留意することで Lem 1.1 より

$$\frac{\mathrm{d}^{m+q-k}}{\mathrm{d}x^{m+q-k}}(x^2-1)^q(\pm1)=0$$

となる．つまり，部分積分を $m+q$ 回繰り返すことにより

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x)P_q^m(x)\mathrm{d}x = \frac{(-1)^q}{2^{p+q}p!q!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{m+q}}{\mathrm{d}x^{m+q}}\left((x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^{m+p}}{\mathrm{d}x^{m+p}}(x^2-1)^p\right)(x^2-1)^q\mathrm{d}x$$

が得られる．$\frac{\mathrm{d}^{m+q}}{\mathrm{d}x^{m+q}}$ 部について展開をすると

$$\frac{\mathrm{d}^{m+q}}{\mathrm{d}x^{m+q}}\left((x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^{m+p}}{\mathrm{d}x^{m+p}}(x^2-1)^p\right) = \sum_{k=0}^{m+q}\binom{m+q}{k}\frac{\mathrm{d}^{m+q-k}}{\mathrm{d}x^{m+q-k}}(x^2-1)^m\frac{\mathrm{d}^{m+p+k}}{\mathrm{d}x^{m+p+k}}(x^2-1)^p.$$

$(x^2-1)^p$ は $2p+1$ 階微分で 0 となるため，$m \leq p$ かつ $m+p+k \leq 2p$ を満たす k は $k \leq p-m$ の場合のみであり，同様に $(x^2-1)^m$ に対しては $m \leq q$ かつ $m+q-k \leq 2m$ を満たす k は $q-m \leq k$ の場合である．つまり，$q-m \leq k \leq p-m$ となるが，$p<q$ のときはこれを満たす k が存在しない．これより，$\langle P_p, P_q \rangle$ での議論と同様にして，$p \neq q$ で $\left\langle P_p^m, P_q^m \right\rangle = 0$ となる．$p=q$ のときは $k=p-m$ 以外の項は 0 となるため，以下が得られる．

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_p^m(x) P_q^m(x) \mathrm{d}x =& \frac{(-1)^p}{(2^p p!)^2} \int_{-1}^{1} \binom{m+p}{p-m} (x^2-1)^q \frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}} (x^2-1)^m \frac{\mathrm{d}^{2p}}{\mathrm{d}x^{2p}} (x^2-1)^p \mathrm{d}x \\
=& \frac{(-1)^p (2m)!(2p)!(m+p)!}{(2^p p!)^2 (p-m)!(2m)!} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^p \mathrm{d}x \\
=& \frac{(m+p)!}{(p-m)!} \cdot \frac{(-1)^p (2p)!}{(2^p p!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^p \mathrm{d}x \\
=& \frac{(m+p)!}{(p-m)!} \cdot \frac{2}{2p+1}
\end{aligned}
$$

□

このように直交する多項式を**直交多項式 (orthogonal polynomials)** という．

1.3　球面調和関数の定義

再びラプラス方程式 $\nabla^2 \psi = 0$ を三次元極座標系

$$
\begin{cases}
x = r \sin\theta \cos\phi \\
y = r \sin\theta \sin\phi \\
z = r \cos\theta
\end{cases}
$$

で

$$
\psi(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)
$$

と変数分離をして考えると，特定条件下で $\Theta(\theta)$ はルジャンドルの陪多項式であらわされることがわかる．この特定条件下とは，

$$
\frac{\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}}{\Phi} = -m^2
$$

において $m \in \mathbb{Z}$ となることと，

$$
\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)}{R} = n(n+1)
$$

において $n \in \mathbb{N}(n \leq |m|)$ となることである．実際にこれらの解が存在することを示す．R については

$$
r^2 \frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + 2r \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - n(n+1)R = 0
$$

となり，これはオイラーの微分方程式であるため $r = e^z$ と置換することで

$$
\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z} - n(n+1)R = 0
$$

が得られる．この微分方程式の特性方程式を解くと

$$
\gamma^2 + \gamma - n(n+1) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma = n, -(n+1)
$$

となるため，任意定数 C_1, C_2 および $z = \ln r$ と置換することで

$$
R(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}
$$

が得られる．Φ については定数係数の二階の線型微分方程式であるため，任意定数 C_3, C_4 を用いて

$$
\Phi(\phi) = C_3 e^{im\phi} + C_4 e^{-im\phi}
$$

とあらわすことができる．これより，前述した条件を満たす R と Φ は存在するため，$\psi(r,\theta,\phi)$ はルジャンドルの陪多項式 $P_n^m(x)$ を用いることで

$$\psi(r,\theta,\phi) = (C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}) P_n^m(\cos\theta)(C_3 e^{im\phi} + C_4 e^{-im\phi})$$

とあらわすことができる．

ここで，天下り的であるが，それぞれの基本解を正規化することを考える．このとき正規化をする対象は直交多項式である $P_n^m(\cos\theta)$ と m に関して直交をする $e^{im\phi}$ である．まず，$P_n^m(\cos\theta)$ は Thm 1.7 より

$$\Theta_n^m(\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta)$$

とすれば

$$\left\langle \Theta_p^m, \Theta_q^m \right\rangle = \int_0^\pi P_p^m(\cos\theta) P_q^m(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta = \delta_{p,q}$$

となる．Φ_m については

$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$$

$$\langle \Phi_p, \Phi_q \rangle = \int_0^{2\pi} \Phi_p^*(\phi)\Phi_q(\phi)\mathrm{d} = \delta_{p,q}$$

となる．ここで，

$$Y_n^m(\theta,\phi) = \Theta_n^m(\theta)\Phi_m(\phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}$$

とおけば，

$$\left\langle Y_p^m, Y_q^n \right\rangle = \delta_{p,q}\delta_{m,n}$$

のような正規直交系として与えることができる．また，$-m$ のときは Thm 1.6 より

$$Y_n^{-m}(\theta,\phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{-im\phi}$$

となるため，$(-1)^m Y_n^{-m}(\theta,\phi) = Y_n^{m*}(\theta,\phi)$ となる．これより，$Y_n^m(\theta,\phi)$ の簡易な統一的表現は

$$Y_n^m(\theta,\phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}$$

と与えられる．以上より，以下の定義が与えられる．

Dfn 1.3

定数 $m, n \in \mathbb{Z}(0 \leq n, |m| \leq n)$ により定義される

$$Y_n^m(\theta,\phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi}$$

を 3 次元空間における n 次の**球面調和関数 (spherical harmonics)** という．

球面調和関数の基本的性質として，導出より直ちに以下が成り立つ．

Thm 1.8

3 次元空間における n 次の球面調和関数 $Y_n^m(\theta,\phi)$ は $\mathbb{C}$ 上で $2n+1$ 次元空間の正規直交規定をなす．

Proof.

導出より自明である．

□

実際に計算をすることで確かめられることであるが，球面調和関数 $Y_n^m(\theta,\phi)$ は x,y,z について同次多項式となり，一般の場合でも同次多項式になると考えられる．これについては球面調和関数の著しい構造を与える．これを示すために，まずは以下の補題を与える．

Lem 1.2　多項式 $p(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ は超球面座標系 $\boldsymbol{x}=r\hat{\boldsymbol{x}}$ を与えたとき，p が n 次の同次多項式であることと $f(r\hat{\boldsymbol{x}})=r^n f(\hat{\boldsymbol{x}})$ を満たすことは同値である．

Proof.

p が n 次の同次多項式であるとき，超球面座標系では $\boldsymbol{x}$ のそれぞれの成分は r を係数として持つため，p の項は r^n を因数としてもつ多項式である．つまり，$p(r\hat{\boldsymbol{x}})=r^np(\hat{\boldsymbol{x}})$ が成り立つ．逆についても同様の議論により明らかである．

□

Lem 1.3　ラプラシアン ∇^2 は超球面座標系 $\boldsymbol{x}=r\hat{\boldsymbol{x}}$ において以下のようにあらわされる．

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{k-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left((\delta_{i,j}-\hat{x_i}\hat{x_j})\frac{\partial^2}{\partial\hat{x_i}\partial\hat{x_j}}\right)$$

なお，$\boldsymbol{x}$ の次元は k であるとし，$\hat{x_i}$ は $\hat{\boldsymbol{x}}=(\hat{x_1},\hat{x_2},\cdots,\hat{x_k})$ としたときの第 i 成分であり，添え字の i,j は縮約を示す．

Proof.

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ とあらわすとして，∇ を展開すると

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\hat{x_j}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\hat{x_j}}.$$

なお，このとき j は縮約である．ここで，それぞれの導関数を計算する．

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_i}=&\frac{1}{2r}\cdot 2x_i=\frac{x_i}{r}=\hat{x_i}\\ \frac{\partial\hat{x_j}}{\partial x_i}=&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{r}\right)=\frac{\delta_{i,j}r-x_j\hat{x_i}}{r^2}=\frac{\delta_{i,j}-\hat{x_j}\hat{x_i}}{r}\end{aligned}$$

∇^2 についても展開すると

$$\nabla^2=\sum_{i=1}^k\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial\hat{x_l}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial\hat{x_l}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right).$$

ここで，

$$\sum_{i=1}^k\hat{x_i}^2=1,\quad\sum_{i=1}^k\hat{x_i}(\delta_{i,j}-\hat{x_i}\hat{x_j})=\hat{x_j}-\hat{x_j}\sum_{i=1}^k\hat{x_i}^2=0$$

となることに留意して展開をすれば，以下が得られる．

$$\begin{aligned}\nabla^2=&\sum_{i=1}^k\hat{x_i}\frac{\partial}{\partial r}\left(\hat{x_i}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\delta_{i,j}-\hat{x_j}\hat{x_i}}{r}\frac{\partial}{\partial\hat{x_j}}\right)+\sum_{i=1}^k\frac{\delta_{i,l}-\hat{x_l}\hat{x_i}}{r}\frac{\partial}{\partial\hat{x_l}}\left(\hat{x_i}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\delta_{i,j}-\hat{x_j}\hat{x_i}}{r}\frac{\partial}{\partial\hat{x_j}}\right)\\ =&\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\sum_{i=1}^k\left(\frac{\delta_{i,l}-\hat{x_l}\hat{x_i}}{r}\delta_{i,l}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\delta_{i,l}\delta_{i,j}-\hat{x_l}\hat{x_i}\delta_{i,j}-\hat{x_j}\hat{x_i}\delta_{i,l}+\hat{x_l}\hat{x_j}\hat{x_i^2}}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x_l}\partial\hat{x_j}}\right)\\ =&\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{k-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\delta_{l,j}-\hat{x_l}\hat{x_j}}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x_l}\partial\hat{x_j}}.\end{aligned}$$

□

この補題における

$$(\delta_{i,j}-\hat{x_i}\hat{x_j})\frac{\partial^2}{\partial\hat{x_i}\partial\hat{x_j}}$$

は超球面 S^{k-1} 上におけるラプラシアンに相当する．このようなラプラシアンを一般化した概念を**ラプラス・ベルトラミ作用素 (Laplace-Beltrami operator)** といい，上記は超球面上におけるラプラス・ベルトラミ作用素である．ただし，これについては詳しくは扱わない．

Lem 1.4　n 次の同次多項式 $p(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$ が調和関数となる必要十分条件は，単位超球面 S^{k-1} 上におけるラプラス・ベルトラミ作用素 $\nabla_{S^{k-1}}$ を用いて以下のように与えられる．

$$\forall \hat{\boldsymbol{x}} \in S^{k-1}[(n(n+k-2)+\nabla_{S^{k-1}})p(\hat{\boldsymbol{x}})=0]$$

なお，$\boldsymbol{x}$ の次元は k であるとする．

Proof.

Lem 1.2 より p は超球面座標系 $\boldsymbol{x} = r\hat{\boldsymbol{x}}$ で $f(\boldsymbol{x}) = r^n f(\hat{\boldsymbol{x}})$ である．p を調和関数であると仮定して，これに対して Lem 1.3 を用いてラプラシアンを作用させると，

$$\begin{aligned} \nabla r^n f(\hat{\boldsymbol{x}}) =& 0 \\ (n(n-1)r^{n-2} + n(k-1)r^{n-2} + \nabla_{S^{k-1}})f(\hat{\boldsymbol{x}}) =& 0 \\ r^{n-2}(n(n+k-2) + \nabla_{S^{k-1}})f(\hat{\boldsymbol{x}}) =& 0 \end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$ は任意であるため $\hat{\boldsymbol{x}} \in S^{-1}$ も任意である．逆については逆の操作をしていくことで直ちに p が調和関数であることがわかる．

□

Thm 1.9

3 次元球面調和関数は同次多項式である．

Proof.

3 次元極座標を

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

と与えれば，3 次元極座標のラプラシアンより単位球面上のラプラス・ベルトラミ作用素 ∇_{S^2} は

$$\nabla_{S^2} = \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

となるため，Lem 1.2 および Lem 1.4 を用いれば

$$n(n+1)r^n p(\theta,\phi) + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)r^n p(\theta,\phi) = 0$$

が得られる．この式は明らかにラプラス方程式であるため，変数分離をして解くことにより 3 次元空間における球面調和関数 Y_n^m が得られる．実際，解は任意定数 C_1, C_2 を用いて

$$p(r,\theta,\phi) = r^n p(\theta,\phi) = r^n(C_1 Y_n^m(\theta,\phi) + C_2 Y_n^{-m}(\theta,\phi))$$

とあらわされる．なお，$|m| \leq n$ である．これを単位球面に制限すれば，球面調和関数は同次多項式であることがわかる．

□